РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ АЛЛЕРА ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Карова Ф.А.

Институт прикладной математики и автоматизации
Российская академия наук

3 сентября 2016 г.

Движение влаги в капиллярно-пористых средах описывается уравнением Аллера [1]. Краевые задачи для классического уравнения Аллера

$$u_t = a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_{txx}$$

изучены в работе [2].
Однако, для описания свойств процесса распространения влаги и примесей в средах с фрактальной структурой наиболее эффективны модели, описываемые уравнениями, содержащими производные дробного порядка.
Метод энергетических неравенств для краевых задач диффузионно-волнового уравнения дробного порядка разработан в работах [3] - [4].

В данной работе рассматриваются краевые задачи для уравнения Аллера дробного порядка в дифференциальной и разностной постановках. Методом энергетических неравенств получены априорные оценки для решений этих задач.

1.Первая краевая задача в дифференциальной постановке

В прямоугольнике $\overline{Q}_T = \{(x,t):\ 0 \le x \le l, 0 \le t \le T\}$ рассмотрим задачу

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \partial_{0t}^{\beta}\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x,t)u + f(x,t), \quad (1)$$

$$u(0,t) = 0,\ \ u(l,t) = 0,\ \ 0 \le t \le T, \quad (2)$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ \ 0 \le x \le l, \quad (3)$$

где $\partial_{0t}^{\gamma} u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int\limits_0^t u_s(x,s)(t-s)^{-\gamma}\, ds$ дробная производная Капуто порядка γ, $0 < \gamma < 1$,
$0 < c_1 \le k(x,t), \eta(x,t) \le c_2$, $q(x,t) \ge 0$ всюду на $\overline{Q}_T$.

Лемма 1. [3] *Для любой функции $v(t)$ абсолютно непрерывной на [0,T], имеет место неравенство*

$$v(t)\partial_{0t}^{\gamma}v(t) \geq \frac{1}{2}\partial_{0t}^{\gamma}v^2(t), \quad 0 < \gamma < 1. \tag{4}$$

Теорема 1. *Если*
$k(x,t) \in C^{1,0}\left(\overline{Q}_T\right), \eta(x,t) \in C^{1,1}\left(\overline{Q}_T\right), q(x,t), f(x,t) \in C\left(\overline{Q}_T\right), 0 < c_1 \le k(x,t), \eta(x,t) \le c_2$, *то решение* $u(x,t)$ *задачи (1)–(3) удовлетворяет априорной оценке*

$$D_{0t}^{\alpha-1}\|u\|_0^2 + \int\limits_0^t \|u_x(\cdot,s)\|_0^2 ds + D_{0t}^{\beta-1}\|u_x(\cdot,s)\|_0^2$$

$$\le M\left(\int\limits_0^t \|f\|_0^2 ds + \|u_0'\|_0^2 + \|u_0\|_0^2\right), \tag{5}$$

где $M > 0$ - *известная постоянная,*

$$\|u\|_0^2 = \int\limits_0^l u^2(x,t)dx.$$

2. Разностная схема для первой краевой задачи

В прямоугольнике $\overline{Q}_T$ введем сетку $\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau$, где

$$\overline{\omega}_h = \{x_i = ih,\ i = 0, 1, \ldots, N,\ hN = l\},$$

$$\overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau,\ j = 0, 1, \ldots, j_0,\ \tau j_0 = T\}.$$

Задаче (1)–(3) ставится в соответствие разностная схема

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y = \Lambda_1 y^{(\sigma)} + \Delta^{\beta}_{0t_{j+\sigma}} \Lambda_2 y + \varphi, \tag{6}$$

$$1 \le i \le N-1, \quad 1 \le j \le j_0 - 1,$$

$$y(0,t) = 0, \quad y(l,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{7}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{8}$$

где

$$\Delta^{\gamma}_{0t_{j+\sigma}} y = \frac{\tau^{1-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} \sum_{s=0}^{j} c^{(\gamma,\sigma)}_{j-s} y^s_t$$

разностный аналог дробной производной Капуто порядка $\gamma, 0 < \gamma < 1$ [6],

$$\sigma = 1 - \frac{\max\{\alpha, \beta\}}{2}, \varphi = f(x_i, t_{j+\sigma}),$$

$$\Lambda_1 y = (a y_{\bar{x}})_x, \quad a_i^j = k(x_{i-1/2}, t_{j+1})$$

$$\Lambda_2 y = (b y_{\bar{x}})_x, \quad b_i = \eta(x_{i-1/2}),$$

$$y^{(\sigma)} = \sigma y^{j+1} + (1-\sigma) y^j,$$

$c_0^{(\alpha,\sigma)} = a_0^{(\alpha,\sigma)}$ при $j = 0$; и при $j \geq 1$,

$$c_s^{(\alpha,\sigma)} = \begin{cases} a_0^{(\alpha,\sigma)} + b_1^{(\alpha,\sigma)}, \ s = 0, \\ a_s^{(\alpha,\sigma)} + b_{s+1}^{(\alpha,\sigma)} - b_s^{(\alpha,\sigma)}, \ 1 \leq s \leq j-1, \\ a_j^{(\alpha,\sigma)} - b_j^{(\alpha,\sigma)}, \ s = j, \end{cases}$$

$$a_0^{(\alpha,\sigma)} = \sigma^{1-\alpha}, \ a_l^{(\alpha,\sigma)} = (l+\sigma)^{1-\alpha} - (l-1+\sigma)^{1-\alpha},$$

$$b_l^{(\alpha,\sigma)} = \frac{1}{2-\alpha}\left[(l+\sigma)^{2-\alpha} - (l-1+\sigma)^{2-\alpha}\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\left[(l+\sigma)^{1-\alpha} + (l-1+\sigma)^{1-\alpha}\right], \ l \geq 1.$$

Разностная схема (6)–(8) имеет порядок аппроксимации $O(\tau^{2-min\{\alpha,\beta\}} + h^2)$.

В работе [5] были получены априорные оценки, показывающие сходимость со скоростью $O(\tau^{2-max\{\alpha,\beta\}} + h^2)$.

Лемма 2. [4] *Для любой функции* $y(t)$ *определенной на сетке* $\bar{\omega}_\tau$ *имеет место неравенство*

$$y^{j+1}\Delta^{\gamma}_{0t_{j+\sigma}}y \geq \frac{1}{2}\Delta^{\gamma}_{0t_{j+\sigma}}(y^2), \quad 0 < \gamma < 1. \tag{9}$$

Теорема 2. *Разностная схема (6)–(8) абсолютно устойчива и ее решение удовлетворяет следующей априорной оценке*

$$\sum_{s=0}^{j}\left(t_{j-s+1}^{1-\alpha}-t_{j-s}^{1-\alpha}\right)\|y^{s+1}\|_0^2$$

$$+\|y_{\bar{x}}^{j+1}]|_0^2\tau$$

$$+\sum_{s=0}^{j}\left(t_{j-s+1}^{1-\beta}-t_{j-s}^{1-\beta}\right)\|\sqrt{b}y_{\bar{x}}^{s+1}]|_0^2$$

$$\leq M\left(\sum_{j'=0}^{j}\|\varphi^{j'}\|_0^2\tau+\|y_{\bar{x}}^{0}]|_0^2\tau+\|y^0\|_0^2+\|\sqrt{b}y_{\bar{x}}^{0}]|_0^2\right), \qquad (10)$$

где $\|y\|_0^2=(y,y), \|y]|_0^2=(y,y]$.

Из априорной оценки следует устойчивость и сходимость разностной схемы со скоростью, равной порядку погрешности аппроксимации $O(\tau^{2-min\{\alpha,\beta\}} + h^2)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Ф. Чудновский, Теплофизика почв, Москва: Наука, 1976, с. 137.

2. М. Х. Шхануков-Лафишев, О краевых задачах для уравнения третьего порядка, Дифференц. уравнения. 18(4) (1982) 1785–1795.

3. A.A. Alikhanov, Boundary value problems for the diffusion equation of the variable order in differential and difference settings, Appl. Math. Comput. 219 (2012) 3938–3946.

4. A.A. Alikhanov, A new difference scheme for the time fractional diffusion equation, J. Comput. Phys. 280 (2015) 424–438.

5. F.A. Karova, Numerical methods of solution of the Dirichlet foundary value proflem for the fractional Allers' equation, Sixth Conference on Numerical Analysis and Applications, Rousse, Bulgaria, 2016.

6. M. Kh. Shkhanukov-Lafishev, F.I. Taukenova, Difference methods for solving boundary value problems for fractional differential equations, Comput. Math. Math. Phys. 46(10) (2006) 1785–1795.

БЛАГОДАРЮ ЗА ВНИМАНИЕ!