

СИЛЬНЫЕ И СЛАБЫЕ РАЗРЫВЫ В НЕСЖИМАЕМОЙ ВЫЗКОУПРУГОЙ СРЕДЕ МАКСВЕЛЛА.

С.В. Мелешко, Н.П. Мошкин, В.В. Пухначев

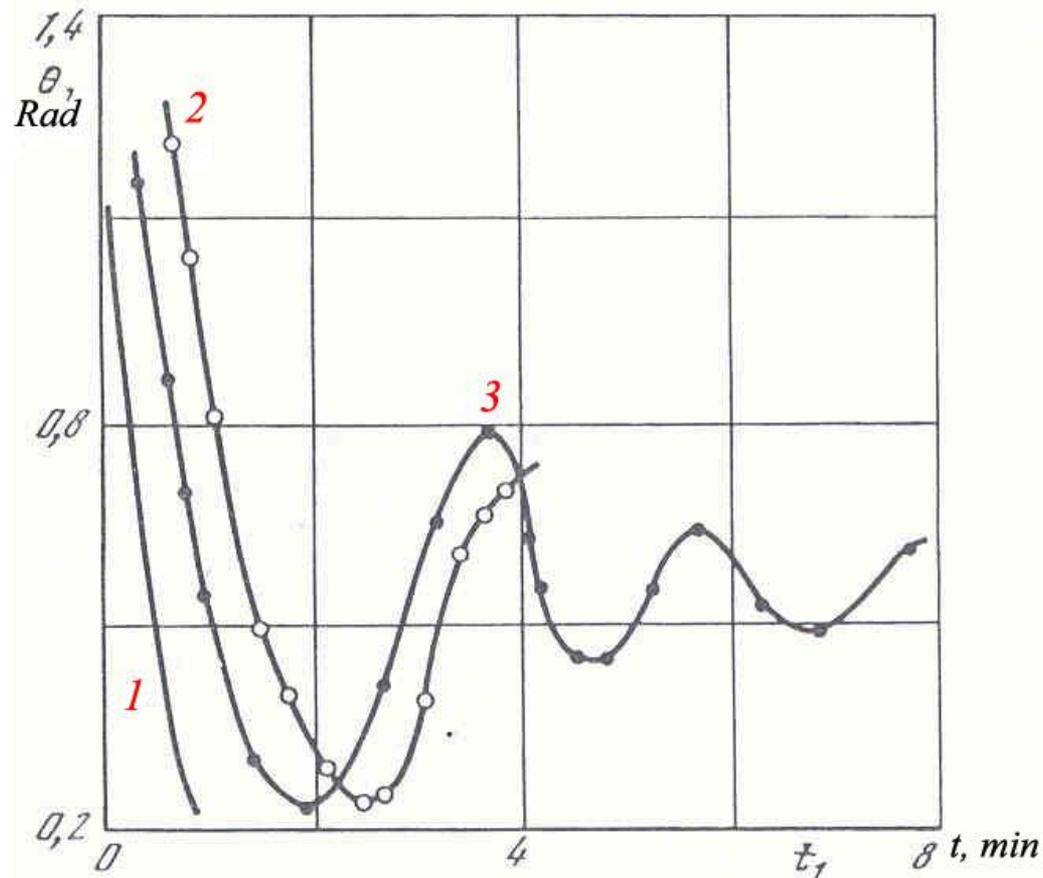
Технический университет Суранари, Накхон-Ратчасима, Таиланд,
Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск,
Россия,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия.

*VIII Всероссийская конференция "Актуальные проблемы
прикладной математики и механики", посвященная памяти
академика А.Ф.Сидорова*

7 сентября 2016 г.



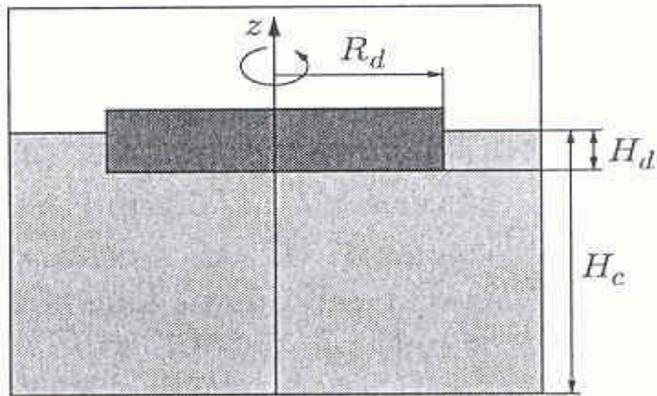
Затухание инерционного движения воды, вызванного вращением цилиндра



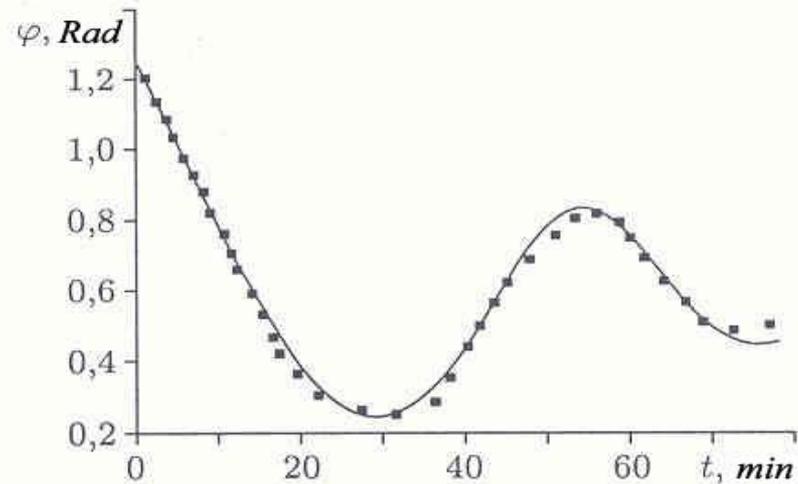
1 – теоретическая кривая для ньютоновской жидкости
2, 3 – эксперименты в различной геометрии

► (Р.А. Апакашев, В.В. Павлов, 1997)

Эксперименты с вращением диска



Фиг. 1



Фиг. 2

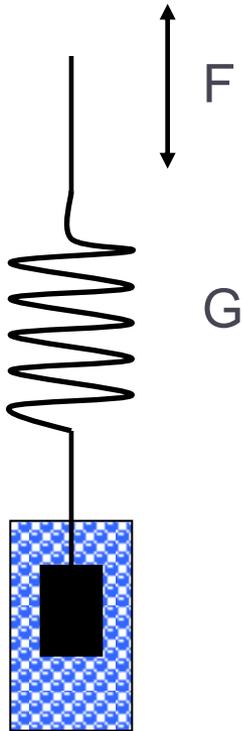
- ▶ Фиг. 1 – схема эксперимента
- ▶ Фиг. 2 – зависимость угла поворота диска от времени в процессе его вращения по инерции под действием начального момента импульса (сплошная линия – расчет, точки – эксперимент).

(А.Е. Коренченко, В.П. Бескачко, 2008)



Модель несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла

Основные определения



$\tau \gg t$ (время наблюдения t много меньше, чем время релаксации) – упругое тело

$\tau \ll t$ (время наблюдения t много больше, чем время релаксации) – ньютонова жидкость

$$\rho(\mathbf{v}_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) = -\nabla p + \operatorname{div} \mathbf{S}, \quad \text{Уравнения движения}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{P} = -p\mathbf{I} + \mathbf{S}, \quad \operatorname{Tr} \mathbf{S} = 0$$

$$\tau \frac{d\tilde{\mathbf{S}}}{dt} + \mathbf{S} = 2\mu \mathbf{D} \quad \text{Уравнение состояния}$$

$$\frac{d\tilde{\mathbf{S}}}{dt} = \frac{d\mathbf{S}}{dt} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{W} + (\mathbf{S} \cdot \mathbf{W})^T \quad \text{Вращательная производная Яуманна}$$

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}^T)$$

τ – время релаксации, μ – вязкость, \mathbf{P} – тензор напряжений, \mathbf{S} – его девиатор, \mathbf{D} – тензор скоростей деформаций, p – давление,

Термодинамика деформирования

Энергетическое тождество

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 + \frac{\tau}{\mu} S : S \right) d\Omega = \int_{\Sigma_t} \mathbf{v} \cdot (-p\mathbf{n} + S \cdot \mathbf{n}) d\Sigma - \frac{2}{\mu} \int_{\Omega_t} S : S d\Omega.$$

Удельная внутренняя энергия $\rho U = \rho c T + \frac{\tau}{4\mu} S : S$

Уравнение притока тепла $\rho \frac{dU}{dt} = \kappa \Delta T + S : D$

Уравнение производства энтропии $\rho T \frac{ds}{dt} = \kappa \Delta T$

Если Ω_t - изолированный материальный объем, и $L(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} \rho s d\Omega$

то $\frac{dL}{dt} = \int_{\Omega_t} \frac{\kappa}{T} |\nabla T|^2 d\Omega.$



Характеристики: $\varphi(x, y, t) = 0$.

$$\varphi_t + u \varphi_x + v \varphi_y = \pm \rho^{-1/2} \left[\left(\frac{\mu}{\tau} + A \right) \varphi_x^2 + \right. \\ \left. + 2B \varphi_x \varphi_y + \left(\frac{\mu}{\tau} - A \right) \varphi_y^2 \right]^{1/2},$$

$$\varphi_t + u \varphi_x + v \varphi_y = 0, \quad \varphi_x = \pm i \varphi_y.$$

Неустойчивость Адамара возможна при $\tau^2 (A^2 + B^2) > \mu^2$



Слоистые движения

$$\rho v_t = B_x, \quad \tau(A_t + Bv_x) + A = 0, \quad \tau(B_t - Av_x) + B = \mu v_x$$

Условие гиперболичности: $\tau A + \mu > 0$

Асимптотический анализ ($\mu\tau^{-1} = \sigma = \text{const}$, $\tau \rightarrow \infty$)

$$\rho v_t = B_x, \quad A_t = -Bv_x, \quad B_t = (\sigma + A)v_x \quad (*)$$

Система (*) имеет интеграл

$$(\sigma + A)^2 + B^2 = [q_0(x)]^2$$

и трансформируется к виду

$$\rho v_t = (q_0 \sin \varphi)_x, \quad \varphi_t = v_x \quad (**)$$

где $\text{tg} \varphi = B(\sigma + A)^{-1}$. Условие гиперболичности (**): $|\varphi| < \pi/2$

Газодинамическая аналогия

Если в (**) $q_0 = \text{const} > 0$, то система эквивалентна уравнениям изэнтропического движения газа с плоскими волнами в массовых лагранжевых координатах:

$$V_t = v_x, \quad v_t = -[p(V)]_x$$

где V – удельный объем, p – давление и

$$p = C - q_0 \sin V$$

($C > q_0$ - постоянная).



Дивергентная форма уравнений

- ▶ Здесь q играет роль энтропии, а φ - удельного объема

$$v_t = \rho^{-1} (q \sin \varphi)_x, \quad \varphi_t = v_x - \sigma \tau^{-1} \sin \varphi,$$

$$q_t = \tau^{-1} (\sigma \cos \varphi - q)$$

Соответствующий «газ» не удовлетворяет аксиомам нормального газа



Разрывные решения системы (**)

Пусть $x = l(t)$ - линия сильного контактного разрыва и $dl/dt = N$ - скорость разрыва.

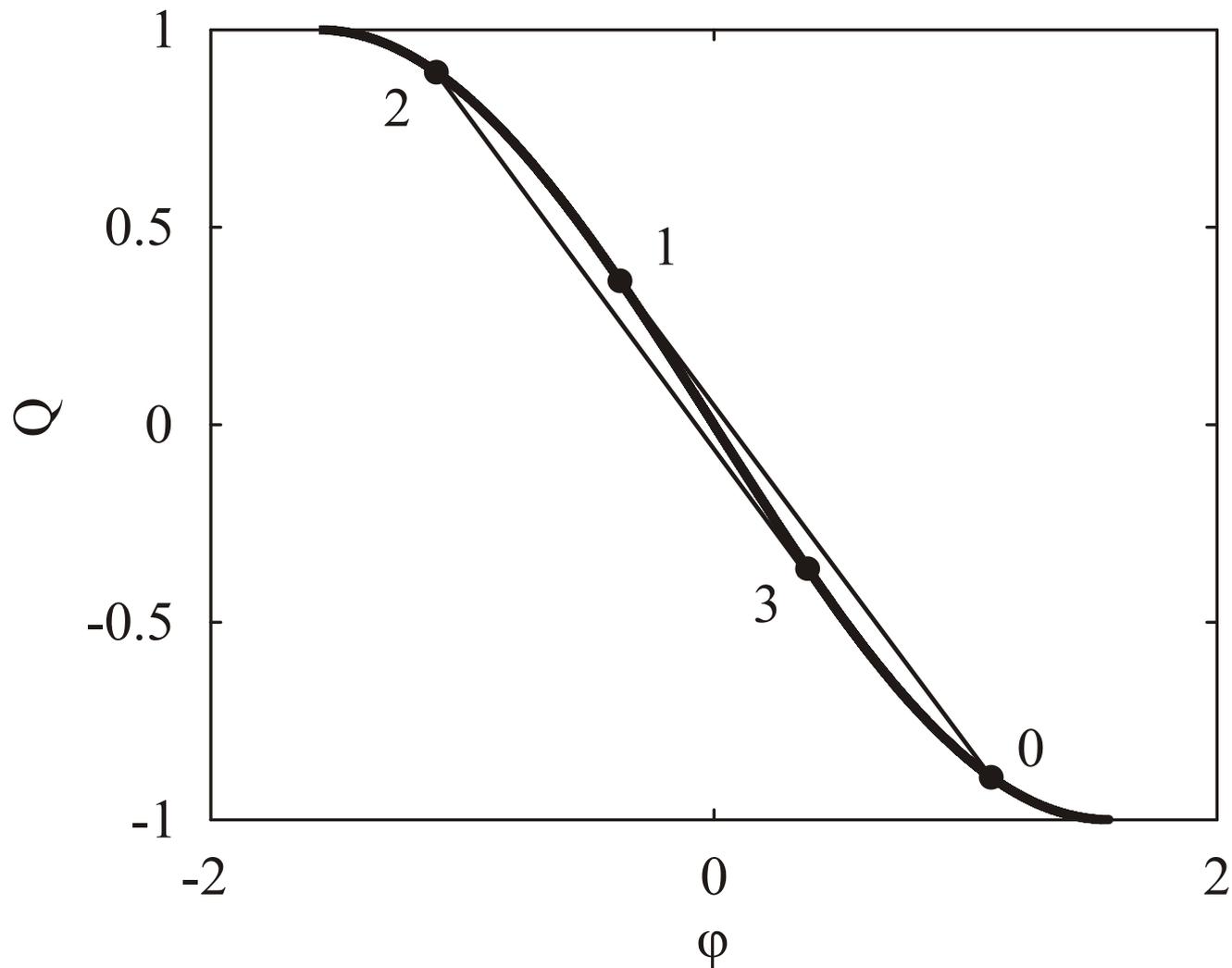
Тогда

$$|N| = \left[\frac{q_0}{\rho} \cdot \frac{\sin \varphi^+ - \sin \varphi^-}{\varphi^+ - \varphi^-} \right]^{1/2} .$$

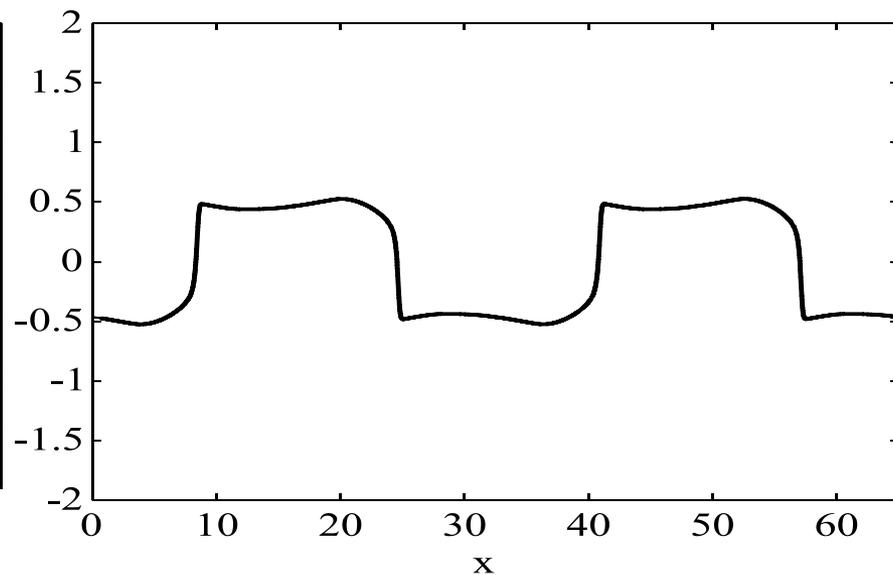
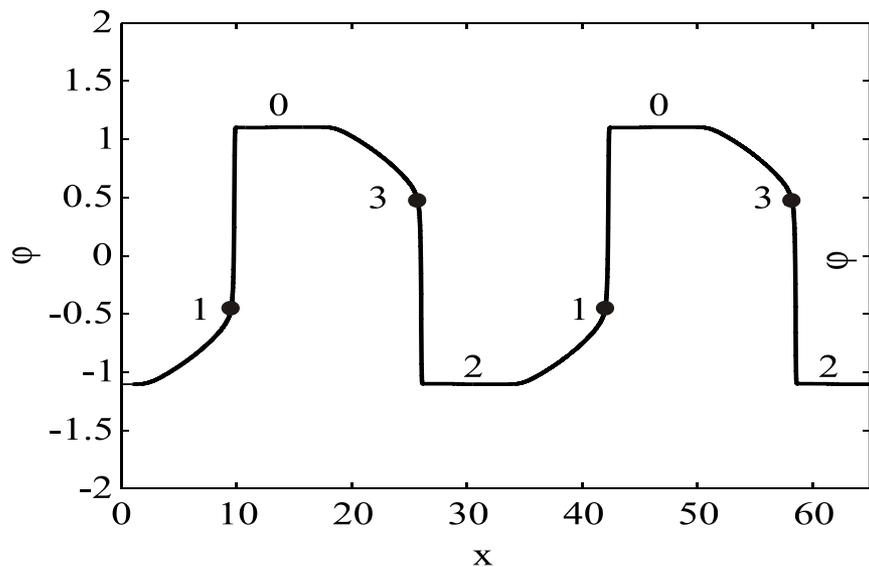
Касательное напряжение терпит разрыв,
а нормальное непрерывно.



Ударные переходы на плоскости Q, φ



Периодические поперечные волны в жидкости Максвелла для изэнтропического (слева) и неизэнтропического (справа) течений



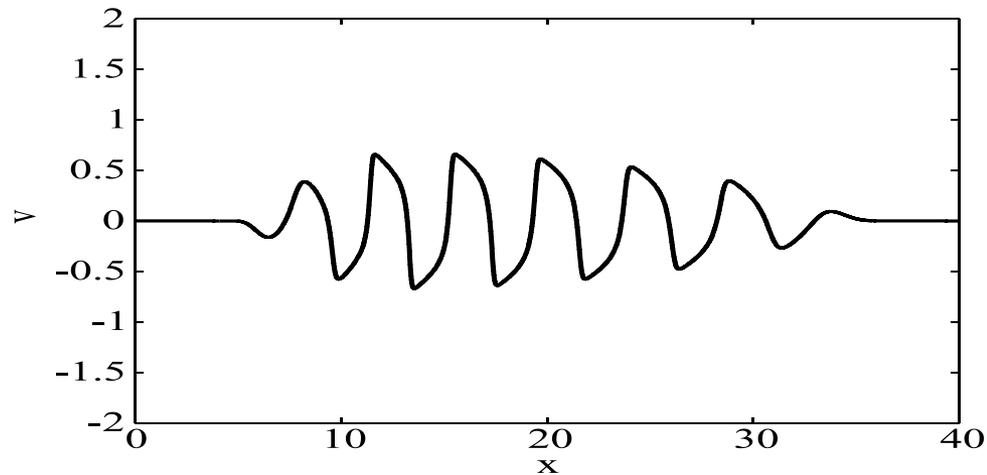
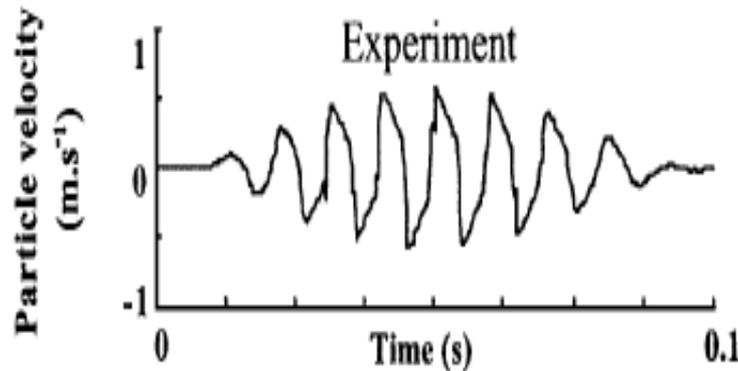
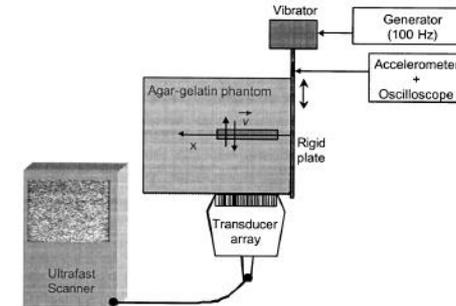
Сравнение расчетных и экспериментальных данных

$$\varphi_t = v_x, v_t = \rho^{-1}(q \sin \varphi)_x, q_t = 0.$$

$$(\varphi, v)|_{t=0} = (\varphi_1, v_1), \quad x > 0, \quad (1)$$

$$v(t, 0) = v_b(t), \quad t > 0$$

$$v_b(t) = V(t) \sin \omega t, V(t) = V_0 \sin(\pi t / T) \operatorname{sgn}(T - t)$$



Численное решение задачи (1)

S. Catheline, J.-L. Gennisson, M. Tanter, and M. Fink
 PHYSICAL REVIEW LETTERS, V. 91, No. 16, 2003

Wave Motion

2011

Nonlinear waves in incompressible viscoelastic Maxwell medium

V.Yu. Liapidevskii^{a,b}, V.V. Pukhnachev^{a,b,*}, A. Tani^c

^a Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Lavrentyev Prospect 15, Novosibirsk 630090, Russia

^b Novosibirsk State University, Pirogova str. 2, Novosibirsk 630090, Russia

^c Keio University, 3-14-1 Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama 223-8522, Japan

Уравнения Максвелла с верхней конвективной производной

Рассматривается система уравнений описывающая плоское движение несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла с постоянной плотностью ρ , динамической вязкостью μ и временем релаксации напряжений τ . Независимыми переменными являются декартовы координаты x, y и время t , а искомыми функциями - проекции u и v вектора скорости \vec{V} на оси координат x, y , соответственно, давление p . Уравнения неразрывности и импульса имеют вид

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0,$$

$$\rho(\vec{v}_t + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}) = -\nabla p + \text{div} \mathbf{S},$$

а реологическое соотношение выберем с верхней конвективной производной:

$$\tau \left(\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \mathbf{S} - \nabla \vec{v} \cdot \mathbf{S} - \mathbf{S} \cdot \nabla \vec{v}^T \right) + \mathbf{S} = 2\mu \mathbf{D},$$

где \mathbf{D} - тензор скоростей деформаций. Элементы тензора \mathbf{S} обозначены символами $S_{xx} = S_{11} = A$, $S_{xy} = S_{12} = S_{21} = B$, $S_{yy} = S_{22} = C$.



Система в координатной записи имеет вид

$$u_x + v_y = 0,$$

$$\rho(u_t + uu_x + vu_y) = -p_x + A_x + B_y,$$

$$\rho(v_t + uv_x + vv_y) = -p_y + B_x + C_y,$$

$$A_t + uA_x + vA_y - 2(Au_x + Bu_y) + \tau^{-1}A = 2\mu\tau^{-1}u_x,$$

$$B_t + uB_x + vB_y - Av_x - Cu_y + \tau^{-1}B = \mu\tau^{-1}(u_y + v_x),$$

$$C_t + uC_x + vC_y - 2(Bv_x + Cv_y) + \tau^{-1}C = 2\mu\tau^{-1}v_y.$$



Уравнения Навье-Стокса в плоском случае допускают частично инвариантное решение, в котором

$$u = xf_y(y, t), \quad v = -f(y, t)$$

Решение, рассматриваемое нами, является его естественным обобщением на случай среды Максвелла.



Задача: найти все функции $f(y,t)$ для которых система совместна. Полное решение этой задачи затруднительно, но есть частные решения.

Случай $f_{yy} = 0$:

$$f(t, y) = y\psi(t).$$

Функции $A(t,x,y)$, $B(t,x,y)$ и $C(t,x,y)$ удовлетворяют системе уравнений в инволюции

$$A_x + B_y = \alpha, \quad B_x + C_y = \beta,$$

$$A_t - y\psi A_y - x\psi B_y = (2\psi - \tau^{-1})A + (2\mu\tau^{-1} - x\alpha)\psi,$$

$$B_t - y\psi B_y - x\psi C_y = -\tau^{-1}B - x\beta\psi,$$

$$C_t + x\psi C_x - y\psi C_y = -(2\psi + \tau^{-1})C - 2\mu\tau^{-1}\psi,$$

где $\alpha = \alpha(t, x)$, $\beta = \beta(t, y)$ такие, что

$$\alpha_t + x\psi\alpha_x = \alpha(\psi - \tau^{-1}), \quad \beta_t - y\psi\beta_y = -\beta(\psi + \tau^{-1}).$$



$$f(t, y) = y\psi(t).$$

$$A = -G_{yy} + (g_{2yy} - g_{1xx})\psi^{-1} / 4 + \\ x^2 \rho(\psi''\psi^{-1} + \psi'\psi^{-1}\tau^{-1} + 6\psi' + 4\psi^2 + \psi\tau^{-1}) / 8 - \mu\tau^{-1},$$

$$B = G_{xy},$$

$$C = -G_{xx} + (g_{2yy} - g_{1xx})\psi^{-1} / 4 + \\ x^2 \rho(\psi''\psi^{-1} + \psi'\psi^{-1}\tau^{-1} + 2\psi' + \psi\tau^{-1}) / 8 - \mu\tau^{-1}$$

Где $G = G(t, x, y)$, $g_1 = g_1(t, x)$, $g_2 = g_2(t, x)$, удовлетворяют уравнениям

$$G_t = -x\psi G_x + y\psi G_y - g_1 - g_2 - G\tau^{-1}$$

$$g_{2t} = \psi y g_{2y} + g_2(\psi'\psi^{-1} - 4\psi - \tau^{-1}) + 2\psi(\mu\tau^{-2}y^2 - 2p_1y - 2p_2 - qy^2)$$

$$g_{1t} = -x\psi g_{1x} + g_1(\psi'\psi^{-1} + 4\psi - \tau^{-1}) + x^4 h(t) - 2x^2\psi q + 4x\psi p_3 + 4\psi p_4$$

Где

$$h = \rho(\psi''' - \psi''\psi'\psi^{-1} + 6\psi''\psi + 2\psi''\tau^{-1} - \psi'^2\psi^{-1}\tau^{-1} + 8\psi'\psi^2 + \\ 7\psi'\psi\tau^{-1} + \psi'\tau^{-2} + 4\psi^3\tau^{-1} + \psi^2\tau^{-2}) / 24$$



Положим

$$A = x^2 a(t, y) + d(t, y), \quad B = xb(t, y), \quad C = c(t, y).$$

Подстановка в исходные уравнения дает следующую систему

$$f_{ty} = f_{yy}f - f_y^2 + (2a + b_y - 2q(t))\rho^{-1},$$

$$c_t = -2cf_y - c\tau^{-1} + c_y f - 2f_y \mu \tau^{-1},$$

$$b_t = -bf_y - b\tau^{-1} + cf_{yy} + b_y f + f_{yy} \mu \tau^{-1},$$

$$a_t = -a\tau^{-1} + 2bf_{yy} + a_y f,$$

$$d_t = 2df_y - d\tau^{-1} + d_y f + 2f_y \mu \tau^{-1}.$$

Замечание

Выражение в круглых скобках в первом уравнении

$$2a + b_y - 2q(t) = 0,$$

появляется если $f(t, y)$ линейно зависит от y .



Стационарное решение

$$v = -f(y); \quad u = xf_y(y).$$

Будем искать стационарное решение вида

$$A = x^2 a(y) + d(y); \quad B = xb(y); \quad C = c(y).$$

Аналог системы К. Хименца (1911) для жидкости Максвелла,

$$f'^2 - ff'' = b' + 2a + 1,$$

$$\lambda(fc' - 2cf') - c = 2f',$$

$$\lambda(fb' - bf' + cf'') - b = -f'',$$

$$\lambda(fa' + 2bf'') - a = 0,$$

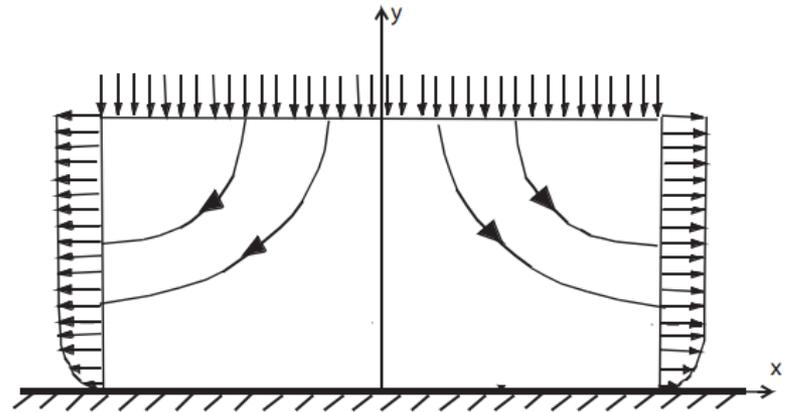
$$\lambda(fd' + 2f'd) - d = -2f'.$$

Краевые условия:

$$f(0) = f'(0) = 0;$$

$$f' \rightarrow 1, \quad c \rightarrow -\frac{2}{2\lambda + 1}, \quad b \rightarrow 0, \quad a \rightarrow 0, \quad d \rightarrow -\frac{2}{2\lambda - 1}, \quad y \rightarrow \infty.$$

$$\lambda = \tau k.$$



Найдено решение плоской и осесимметричной задачи о течении жидкости Максвелла около критической точки.

Решение в виде ряда по λ

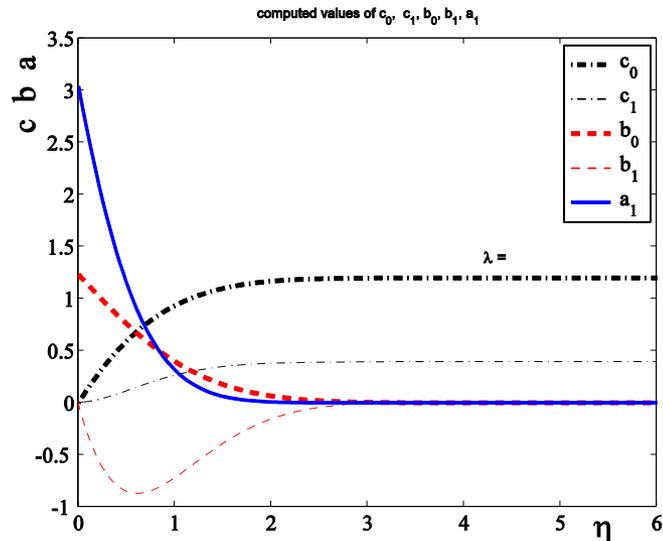
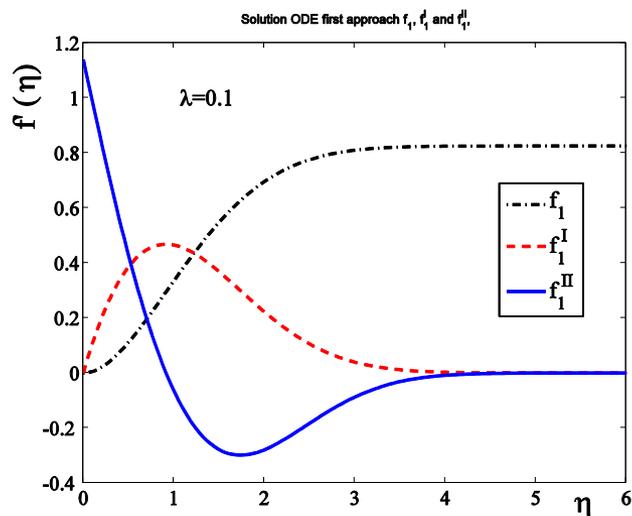
Формально можно найти решение в виде ряда по степеням λ

$$f = f_0 + \lambda f_1 + \dots, \quad c = c_0 + \lambda c_1 + \dots,$$

$$b = b_0 + \lambda b_1 + \dots, \quad a = a_0 + \lambda a_1 + \dots \quad .$$

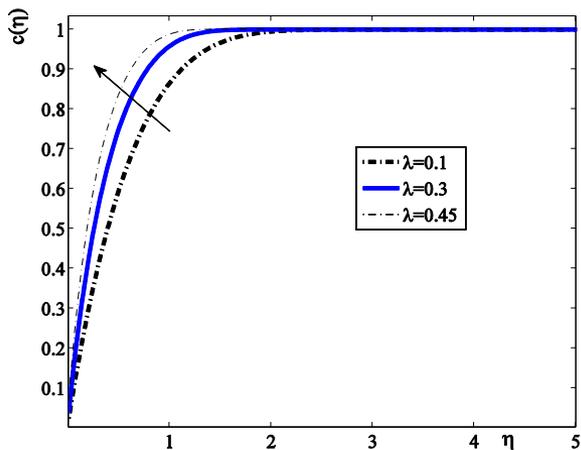
Нулевое приближение определяется из системы

$$(f_0')^2 - f_0 f_0'' = b_0' + 2a_0 + 1,$$

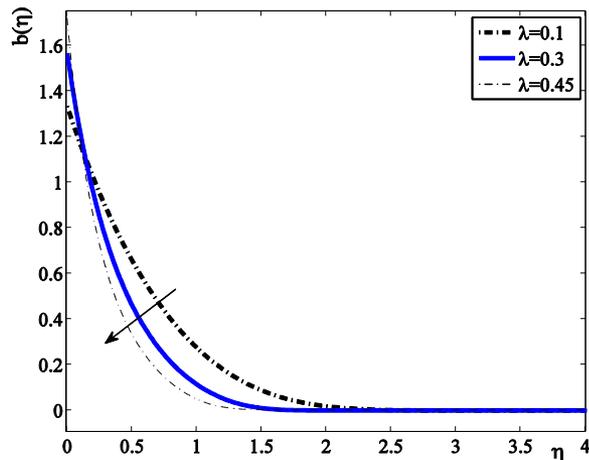


Численное решение полной задачи для $\lambda=0,1 - 0,45$

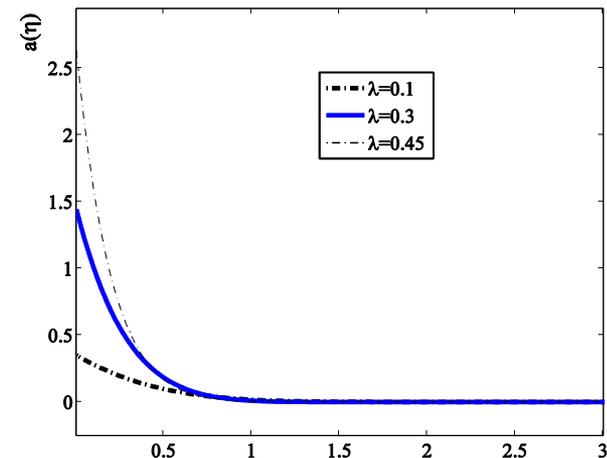
$a(\eta)$



$b(\eta)$



$c(\eta)$

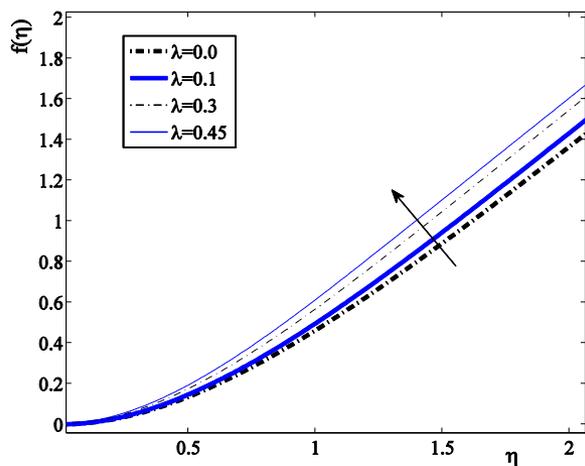


Функции $c(\eta)$, $b(\eta)$ и $a(\eta)$ для нескольких значений $\lambda=0,1; 0,3; 0,45$.

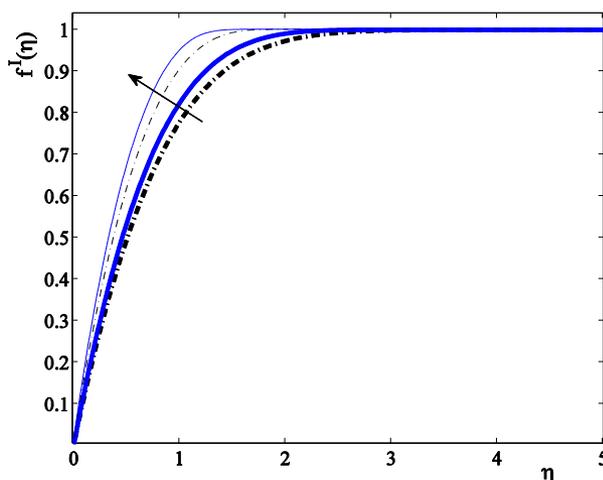


Численное решение полной задачи для $\lambda=0,1 - 0,45$

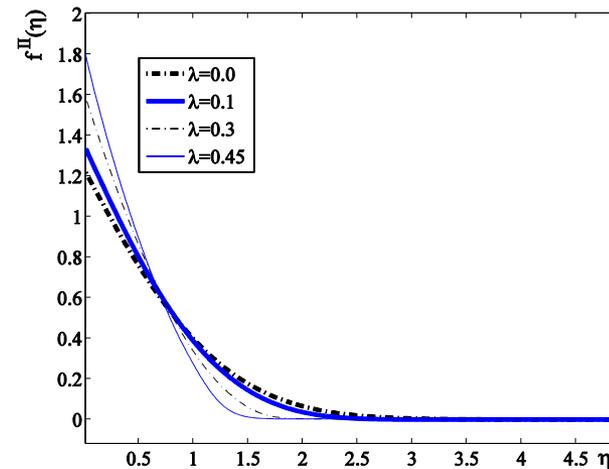
$f(\eta)$



$f'(\eta)$



$f''(\eta)$



Функции $f(\eta)$, $f'(\eta)$ и $f''(\eta)$ для нескольких значений $\lambda=0,1; 0,3; 0,45$.



Нестационарная задача

Далее рассматривается нестационарное течение среды Максвелла, в котором

$$v = v(y, t), \quad u = -xv_y(y, t), \quad p = x^2 P(y, t) + Q(y, t),$$

$$A = S_{xx} = x^2 a(y, t) + d(y, t), \quad B = S_{xy} = xb(y, t), \quad C = S_{yy} = c(y, t).$$

Переход к лагранжевой координате ξ осуществляется с помощью решения задачи Коши

$$y_t = v(y, t), \quad t > 0; \quad y = \xi, \quad t = 0.$$

Функция $y_\xi = z(\xi, t)$ удовлетворяет уравнению в вариациях,

$$z_t = w z,$$

где обозначено $w(\xi, t) = v_y[y(\xi, t), t]$.

Обозначим $a = f(\xi, t)$, $b = g(\xi, t)$, $c = h(\xi, t)$.



Функции f, g, h, w, z удовлетворяют уравнениям

$$\rho w_t + z^{-1} g_\xi = \rho w^2 - 2h + \varphi(t),$$

$$g_t + z^{-1} (f + \mu\tau^{-1}) w_\xi = -\tau^{-1} g + gw,$$

$$f_t = -\tau^{-1} f + 2(f + \mu\tau^{-1})w,$$

$$h_t + 2z^{-1} gw_\xi = -\tau^{-1} h,$$

$$z_t = wz.$$



Систему можно привести к симметричному виду путем введения новой искомой функции

$$j = (f + \mu\tau^{-1})h - g^2.$$

Далее, удобно сделать замену $r = f + \mu\tau^{-1}$.

Весьма существенно, что в уравнениях для функций f и z отсутствуют производные этих функций по ξ . В результате мы приходим к новой системе, имеющей дивергентный вид:

$$(\rho zw)_t + g_\xi = z[2\rho w^2 - (j + g^2)r^{-1} + \varphi(t)], \quad (1)$$

$$(r^{-1}zg)_t + w_\xi = -zgr^{-2}\mu\tau^{-2}, \quad (2)$$

$$j_t = [2(w - \tau^{-1}) + \mu\tau^{-2}r^{-1}]j + \mu\tau^{-2}r^{-1}g^2, \quad (3)$$

$$r_t = (2w - \tau^{-1})r + \mu\tau^{-2}, \quad (4)$$

$$z_t = wz. \quad (5)$$

После решения системы и возврата к эйлеровым переменным функция Q находится в квадратурах, а функция d определяется из линейного уравнения первого порядка.



Отметим некоторые простые свойства полученной системы.

- При заданных функциях w, g уравнения (4) - (5) являются линейными относительно искомым функций \dot{j}, r, z .
- Так как $z=1$ при $t=0$, то функция z остается положительной на всем интервале существования решения системы.
- Предположим, что имеет место неравенство $r > 0$ при $t=0$. В силу уравнения (4), это неравенство выполняется и для $t>0$, что легко доказывается от противного.
- Положительность функции r обеспечивает наличие у системы (1)-(5) двух «звуковых» характеристик, $\xi = \pm X(t)$. Их дифференциальные уравнения имеют вид

$$\frac{dX}{dt} = \pm \rho^{-1/2} z^{-1} r^{1/2}.$$

- Кроме того, эта система имеет трехкратную контактную характеристику, $\xi = 0$.



Важным свойством системы (1)-(5) является ее симметричность. После умножения уравнений системы поочередно на функции w, g, j, f с подходящими коэффициентами мы приходим к соотношению

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho z w^2 + z r^{-1} g^2 + \frac{\rho^3}{\mu^6} j^2 + \frac{\rho}{\mu^2} r^2 + \frac{\rho}{\tau^2} z^2 \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} (w g) = \\ & z w \left[3 \rho w^2 / 2 - (j + g^2) r^{-1} + \varphi(t) \right] + z g^2 r^{-1} (w - \tau^{-1} - \mu \tau^{-2} r^{-1}) / 2 + \\ & \frac{\rho^3}{\mu^6} j \left\{ \left[2(w - \tau^{-1}) + \mu \tau^{-2} r^{-1} \right] j + \mu \tau^{-2} r^{-1} g^2 \right\} + \\ & \frac{\rho}{\mu^2} r \left[(2w - \tau^{-1}) r + \mu \tau^{-2} \right] + \frac{\rho}{\tau^2} w z^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Постоянные множители подобраны так, чтобы все слагаемые в суммах имели одну размерность.

Соотношение (6) влечет существование интеграла энергии.



Интеграл энергии

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} E(\xi, t) d\xi = \int_{\Omega_T} J(\xi, t) dt + \int_{\xi_1}^{\xi_2} E(\xi, 0) d\xi \quad (7)$$

Здесь $E(\xi, t)$ – подынтегральное выражение в левой части (6). Дифференцируя уравнения (1)-(5) по z , мы можем получить интеграл энергии, содержащий в левой части сумму норм функций $w_t(\cdot, t)$, $g_t(\cdot, t)$ в пространстве $L^2(\xi_1, \xi_2)$. Эти нормы будут ограничены, так же как и нормы функций j_t, r_t, z_t . Предположим, что искомые функции в системе (1)-(5) ограничены по модулю в области Ω_T . Из сказанного выше, в силу уравнений (1)-(5), вытекает, что при почти всех $t \in [0, T]$ справедливо включение

$$w_t(\cdot, t), g_t(\cdot, t) \in L^2(\xi_1, \xi_2).$$



- Этот факт означает, что в решениях начально-краевых задач для системы (1)-(5) **невозможна градиентная катастрофа**, хотя слабые разрывы решений допускаются.
- В этом смысле указанная система близка к слабо нелинейной системе двух уравнений гиперболического типа, рассмотренной в 50-х годах в работе Н.Н. Яненко (Яненко Н.Н. О разрывах в решении квазилинейных уравнений, Успехи математических наук, т. X, вып. 2(64), 1955г., С.195-202).
- Пользуясь интегралами энергии высших порядков, можно доказать локальную теорему существования гладкого решения сформулированных задач при естественных условиях гладкости начальных данных.
- Теорема единственности классического решения тоже является следствием интегралов энергии.



Конкретизация интеграла энергии связана с постановкой начально-краевой задачи. Наиболее простой представляется задача Коши при условии, что искомые функции быстро убывают при $\xi \rightarrow \pm\infty$. Если задача решается в полуполосе $\Omega_T = \{\xi, t : \xi_1 < \xi < \xi_2; 0 < t < T\}$, то краевые условия на ее боковых границах должны быть диссипативными.

Например, $w = 0, \quad \xi = \xi_1; \quad g = 0, \quad \xi = \xi_2; \quad 0 < t < T$.

Первое из этих условий означает, что на линии $\xi = \xi_1$ обращается в нуль компонента скорости u . Компонента v восстанавливается квадратурой

$$v = \int_0^\xi z^{-1}(\eta, t) w(\eta, t) dt,$$

так что $v(\xi_1, t) = 0$. Таким образом, на прямой $\xi = \xi_1$ выполнено условие прилипания. Линию $\xi = \xi_2$ можно принять за свободную границу: на ней касательное напряжение $S_{xy} = 0$. Условие обращения в нуль нормального напряжения обеспечивается апостериори с помощью выбора функции $\varphi(t)$.



Простейшие решения.

Запишем систему (1)-(5) в новой форме, введя функцию r вместо функции f и изменив знак перед функцией $\varphi(t)$, которая произвольно зависит от t :

$$\begin{aligned}\rho w_t + z^{-1} g_\xi &= \rho w^2 - 2h - \varphi(t), \\ g_t + z^{-1} r w_\xi &= (w - \tau^{-1}) g, \\ h_t + 2z^{-1} g w_\xi &= -\tau^{-1} h, \\ r_t &= (2w - \tau^{-1}) r + \mu \tau^{-2}, \quad z_t = wz.\end{aligned}\tag{9}$$

Система (9) имеет решения, в которых функции w , h , r , z не зависят от ξ , а $g = \xi s(t)$. Система (9) принимает рекуррентную структуру:

$$\rho \frac{dw}{dt} + z^{-1} s = \rho w^2 - 2h - \varphi(t),$$
$$\frac{ds}{dt} = (w - \tau^{-1}) s, \quad \frac{dr}{dt} = (2w - \tau^{-1}) r + \mu \tau^{-2}, \tag{10}$$

$$\frac{dh}{dt} = -\tau^{-1} h, \quad \frac{dz}{dt} = wz. \tag{11}$$

Простейшие решения.

Видно, что первое уравнения (11) легко интегрируется

$$h = c_1 \exp(-t / \tau).$$

Более того, функция z , входящая в первое уравнение системы (10), может быть из него исключена. Сделаем подстановку $s = hz$. Второе уравнении (10) выполняется автоматически.

Итак, система (10) редуцируется к следующей:

$$\rho \frac{dw}{dt} = \rho w^2 - 3h - \varphi(t), \quad (12)$$

$$h = c_1 \exp(-t / \tau).$$

Параметры ρ, τ могут быть исключены из этой системы масштабным преобразованием.



Отметим случай, когда $\varphi(t) = 3c_1 \exp(-t / \tau)$.

В этом случае система (12) с $\rho = 1, \tau = 1$ превращается в динамическое уравнение,

$$\frac{dw}{dt} = w^2, \quad w(t) = -\frac{1}{t + c_4}.$$

Можно найти r и z в явном виде.

$$z(t) = \frac{1}{t + c_4} = -w(t), \quad s(t) = zh = \frac{1}{t + c_4} c_1 \exp(-t / \tau),$$

$$r(t) = \frac{\mu\tau^{-2}}{(t + c_4) + \exp(t / \tau)} \left[\frac{1}{2} (t + c_4)^2 + \frac{1}{\tau} \exp(t / \tau) + c_5 \right]$$



Построение решения, имеющего слабые разрывы.

Зададимся конкретным видом функции $\varphi(t)$ и выберем постоянную m . Заметим, что система (9) допускает решения, в которых функция g является нечетной функцией переменной ξ , а остальные искомые функции – четными функциями этой переменной.

Сформулируем задачу Коши для системы (9):

$$w = w_0, h = h_0, r = r_0, z = 1 \quad \text{при} \quad \xi \in \mathfrak{R}; \quad t = 0;$$

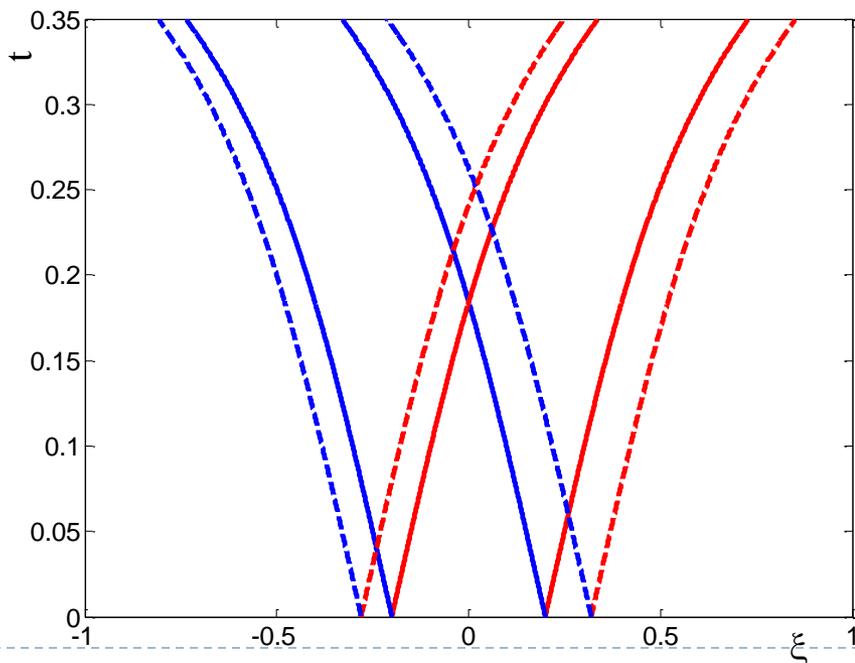
$$g = \begin{cases} -g_0 & \text{as } \xi < -m, \\ g_0 \xi & \text{as } |\xi| < m, \\ g_0 & \text{as } \xi > m. \end{cases}$$

В точках $\xi = \pm m$ на прямой $t=0$ зарождаются слабые разрывы.

Они распространяются вдоль звуковых характеристик $\xi = \pm X(t)$, выходящих из этих точек. Дифференциальные уравнения характеристик имеют вид

$$\frac{dX}{dt} = \pm \rho^{-1/2} z^{-1} r^{1/2}.$$

Две пары характеристик, выходящих из указанных точек, разбивают полосу $\xi \in \mathfrak{R}$, $0 < t < T$ (где T достаточно мало) плоскости ξ, t на пять областей. В трех из них решение системы (9) сводится к решению системы обыкновенных уравнений с соответствующими начальными данными, а еще две области это зоны взаимодействия "простых волн".



Численное решение

Запишем систему (9) в виде. Положим $\rho = 1$.

$$w_t + z^{-1} g_\xi = w^2 - 2h - \varphi(t) = \Phi_1,$$

$$g_t + z^{-1} r w_\xi = (w - \tau^{-1}) g = \Phi_2,$$

$$j_t = \left[2(w - \tau^{-1}) + \mu \tau^{-2} r^{-1} \right] j + \mu \tau^{-2} r^{-1} g^2 = \Phi_3,$$

$$r_t = (2w - \tau^{-1}) r + \mu \tau^{-2} = \Phi_4, \quad z_t = w z = \Phi_5.$$

Первые два уравнения можно преобразовать введя "инварианты" Римана

$$(g_t + r_{1/2} w_t) + \lambda (g_\xi + r_{1/2} w_\xi) = \Phi_2 + r^{1/2} \Phi_1,$$

$$(g_t - r_{1/2} w_t) - \lambda (g_\xi - r_{1/2} w_\xi) = \Phi_2 - r^{1/2} \Phi_1,$$

$$\lambda = z^{-1} r^{1/2}.$$

Полученная система аппроксимируется с учетом направления характеристик и решается численно.



Задача Коши

$$g = \begin{cases} -g_0 & \text{as } \xi < -m, \\ g_0 \xi & \text{as } |\xi| < m, \\ g_0 & \text{as } \xi > m. \end{cases}$$

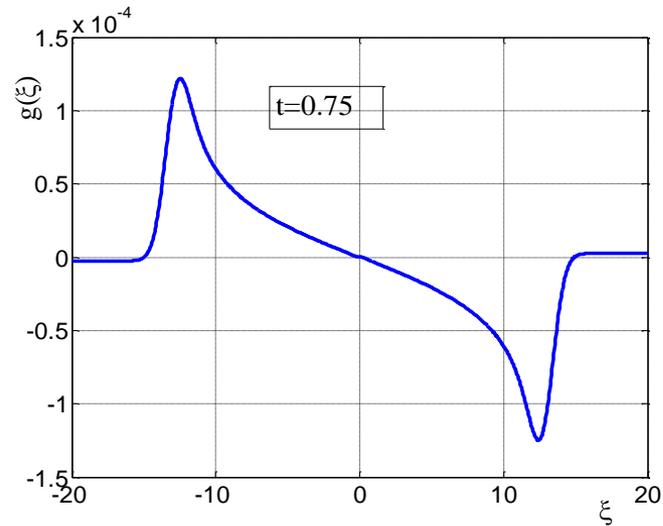
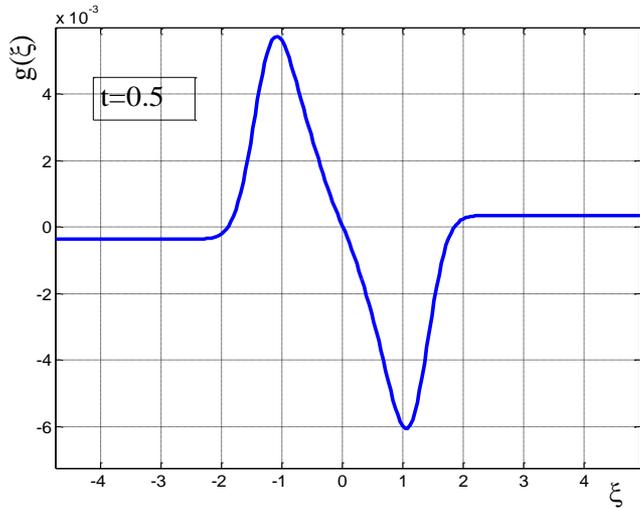
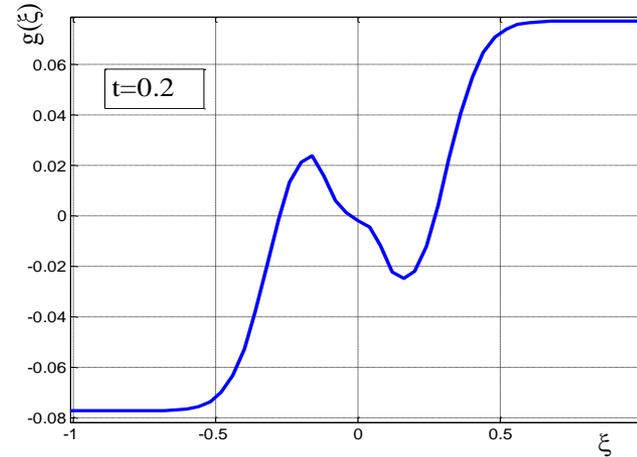
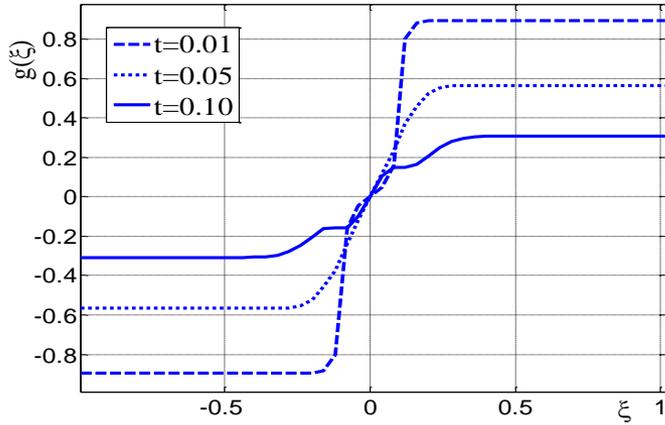
$$w = w_0, \quad j = j_0, \quad r = r_0, \quad \text{as } \xi \in \mathfrak{R}; \quad t = 0.$$

Решение определялось на интервале $-L < \xi < L$, для достаточно большого L .



Результаты расчетов

$w_0 = -1, j = 1, r = 1, z = 1, g_0 = 1, m = 0.2$, as $\xi \in [-L, L]$; $t = 0$.



Спасибо за внимание!

