

**VII Всероссийская конференция
«Актуальные проблемы прикладной
математики и механики», посвященная
памяти академика А.Ф. Сидорова»**

МЕТОД КОЛЛОКАЦИИ И НАИМЕНЬШИХ НЕВЯЗОК

Шапеев В.П.

ИТПМ СО РАН, НГУ

- 1 Введение.
- 2 Варианты метода КНН для уравнений Навье-Стокса.
 - 2D уравнения Навье-Стокс. Постановка задачи.
 - Описание метода.
 - Численные эксперименты, вариант метода повышенной точности.
- 3 Течение вязкой жидкости в 3D каверне.
- 4 Вариант алгоритма ускорения сходимости итераций решения СЛАУ с использованием подпространств Крылова.
- 5 Комбинирование операции продолжения в методе Федоренко с алгоритмом ускорения сходимости итераций по Крылову.
- 6 Еще результаты и приложения метода КНН.
 - Примеры с нерегулярными сетками.

Метод коллокации и наименьших квадратов (КНК) и его вариант метод коллокации и наименьших невязок (КНН) — проекционные методы.

В них приближенное решение задачи для дифференциальных уравнений (дифференциальной задачи) ищется в функциональном пространстве, в которое она проектируется.

В результате проектирования возникает новая задача, которую назовем "дискретной".

Из соображений скорости вычислений и простоты чаще всего в качестве такого пространства берется линейное пространство многочленов.

Простой в реализации метод коллокаций (МК) в методе КНК сочетается (комбинируется) с методом наименьших квадратов (НК).

В методе КНК (и КНН) в отличие от МК для отыскания решения строится переопределенная система уравнений. В большинстве случаев это система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). В методе КНК переопределенная СЛАУ решается методом НК.

Результат сочетания методов коллокации и наименьших квадратов — метод КНК несколько сложнее метода коллокаций. Но КНК сохраняет другие его свойства, важные при численном решении задач для всех видов и типов дифференциальных уравнений (ODE и PDE). Например, наличие в аналитическом виде решения в ячейке разностной сетки ("куска от глобального решения") облегчает по сравнению с некоторыми методами создание вариантов метода на различных сетках (нерегулярных, адаптивных, в областях с криволинейной границей) и других вариантов, полезных в приложениях.

В результате применения метода НК для решения переопределенной СЛАУ на численном решении достигается некоторый минимум функционала невязки уравнений дискретной задачи, аппроксимирующей исходную дифференциальную задачу. И это зачастую усиливает возможности МНК (и в особенности КНК) по сравнению с методом коллокации (и не только) при их применении для решения различных задач с особенностями, например, вида погранслоев с большими градиентами и другими особенностями.

Наличие переопределенной системы затрудняет получение каких-либо априорных оценок и строгих доказательств тех или иных свойств решения дискретных задач. Основным способом выяснения их является численный эксперимент.

Задача. Восстановить функцию $f(x)$, $x \in [x_0, x_n]$ по ее дискретным значениям $f_{\varepsilon,i}$: $f_{\varepsilon,i} = f(x_i) + \varepsilon_i$, $i = 0, 1, \dots, n$, заданным с погрешностями ε_i , величина которых имеет случайный характер, и $x_{i+1} - x_i = h_{i+1} < \bar{h}$.

Известно, что аппроксимант $\Phi(x)$, построенный по таким данным методом наименьших квадратов (МНК), может приближать $f(x)$ точнее, чем интерполянт (в частности, чем многочлен Лагранжа. Именно это обеспечило успех Гауссу в приложении им предложенного МНК).

В последнем случае: 1) в определенных пределах, чем больше значений во входных данных задачи, тем точнее результат; 2) тем более гладкий аппроксимант (важное следствие для приложения сглаживающих сплайнов, но зачастую не главное для методов КНК и КНН).

*Гаусс предложил и применил МНК в 1795 г.,
Лежандр открыл МНК независимо в 1805 г.*

Метод наименьших квадратов (численный эксперимент).

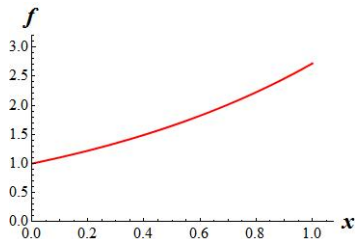


Рис.: Некоторая существующая функция $f(x)$.

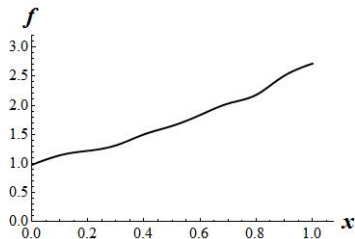


Рис.: Аппроксимант $\varphi(x)$, построенный методом НК.

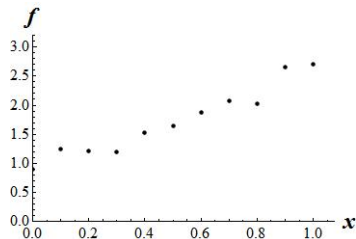


Рис.: Дискретные данные $f_{\epsilon,i}$ со случайной погрешностью ϵ_i ($i = 1, \dots, 11$) функции $f(x)$ для задачи построения аппроксиманта $\varphi(x)$.

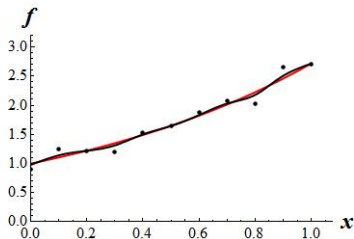


Рис.: Функция $f(x)$, ее дискретные данные с погрешностью и ее аппроксимант по методу НК.

Первые публикации по применению в комбинации метода наименьших квадратов с другими численными методами для решения PDE.

А.В. Плясунова, А.Г. Слепцов (1987).

При решении краевой задачи для нелинейного параболического уравнения для соответствующей дискретой задачи метода коллокаций выписывали переопределенную СЛАУ из уравнений коллокаций, условий (требований) согласования решения на границах между соседними ячейками разностной сетки и требования выполнения решением граничных условий задачи. СЛАУ решали методом НК.

G.F. Carey, B.-N. Jiang (1987).

При построении формул конечно-элементного метода часть уравнений для определения решения дискретной задачи получали из требования минимизации функционала невязки численного решения, а другую часть уравнений из требования согласования (непрерывность решения в нескольких точках на границах между соседними ячейками) и требования выполнения решением граничных условий в приграничных ячейках.

Суть метода коллокаций заключается в следующем.

- Приближенное решение ищется в конечномерном линейном пространстве функций.
- Неизвестные коэффициенты его разложения по базису пространства определяются из уравнений коллокаций и краевых условий.
- Уравнения коллокаций — требования того, чтобы приближенное решение удовлетворяло дифференциальным уравнениям задачи в конечном множестве точек области постановки задачи (точках коллокаций).
- Краевые условия получаются из соответствующих условий исходной постановки задачи, записанных в нескольких точках на границе области.

- В методе коллокаций записывается ровно столько уравнений, сколько имеется неизвестных.
- В методе коллокаций и наименьших квадратов (КНК) число уравнений превосходит число неизвестных, то есть система, из которой ищутся неизвестные коэффициенты, является переопределенной.
- Для ее решения используется метод наименьших квадратов. В метода КНН для решения переопределенной СЛАУ ее матрица преобразуется в треугольную по Гивенсу или Хаусхолдеру. Можно показать, что при определенном фиксированном порядке уравнений в СЛАУ **и отсутствии ошибок округлений в вычислениях** этот способ дает то же самое псевдорешение, что и метод НК, но при этом в первом случае матрица СЛАУ на последнем этапе решения лучше обусловлена, чем во втором случае. Это имеет важное значение при решении задач на "подробных" сетках.

Постановка задачи

В области $\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2]$ рассмотрим краевую задачу для стационарных уравнений Навье-Стокса

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 \frac{\partial v_j}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_j}{\partial x_2} + \frac{\partial p}{\partial x_j} - \frac{1}{\text{Re}} \Delta v_j = f_j, \quad j = 1, 2, \\ \operatorname{div} \vec{v} = 0, \\ \vec{v}|_{\partial\Omega} = \vec{V}, \quad \int_{\Omega} p d\Omega = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

где

- $\vec{v} = (v_1, v_2)$ — вектор скорости,
- $p(x_1, x_2)$ — давление,
- Re — Число Рейнольдса.

Описание метода

- Область Ω покрывается разностной сеткой, состоящей из N ячеек $\Omega_1, \dots, \Omega_N$. Область разбивается на подобласти, состоящие из нескольких ячеек. Есть принципиальная возможность обходиться сеткой из узлов, обозначающих только "центры всех кусков решения задачи" и отличной от традиционной разностной сетки.
- Решение задачи (1) строится с помощью итерационного процесса¹. В нем каждая итерация (Гаусса–Якоби) состоит из последовательного решения локальных краевых задач во всех подобластях.
- В осуществленных реализациях в каждой ячейке матрица переопределенной системы приводится к треугольному виду (в м. КНК — методом НК, в м. КНН — ортогональными методами Хаусхолдера или Гивенса).
- Во всех случаях кроме одного в качестве подобласти бралась отдельная ячейка.
- Была успешная реализация, в которой в отдельные подобласти объединялись все ячейки в каждой строке разностной сетки.

На итерации по подобласти Ω_i рассматривается локальная задача

$$\begin{aligned}
 (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \nabla p &= \frac{1}{Re} \Delta \vec{v} + \vec{f}, & (x_1, x_2) \in \Omega_i, \\
 \operatorname{div} \vec{v} &= 0, & (x_1, x_2) \in \Omega_i, \\
 v_n + \frac{\partial v_n}{\partial n} - p &= \hat{v}_n + \frac{\partial \hat{v}_n}{\partial n} - \hat{p}, & (x_1, x_2) \in \partial\Omega_i \setminus \partial\Omega, \\
 v_\tau + \frac{\partial v_\tau}{\partial n} &= \hat{v}_\tau + \frac{\partial \hat{v}_\tau}{\partial n}, & (x_1, x_2) \in \partial\Omega_i \setminus \partial\Omega, \\
 \vec{v} &= \vec{V}, & (x_1, x_2) \in \partial\Omega_i \cap \partial\Omega, \\
 \int_{\Omega_i} p d\Omega &= - \int_{\Omega \setminus \Omega_i} \hat{p} d\Omega,
 \end{aligned}$$

где

- $\vec{n}$ и $\vec{\tau}$ — векторы внешней нормали и касательной к границе ячейки $\partial\Omega_i$ соответственно,
- $v_n = \vec{v} \cdot \vec{n}$, $v_\tau = \vec{v} \cdot \vec{\tau}$,
- $\hat{v}_n$, $\hat{v}_\tau$, $\hat{p}$ — приближения для компонент решения, имеющиеся в соседних ячейках при построении решения на текущей итерации по подобласти Ω_i .

- Приближенное решение локальной задачи строится в каждой ячейке с помощью метода КНН.
- Скорость (v_1, v_2) ищется в пространстве

$$V_{m_v}(\Omega_i) = \{(v_1, v_2) : v_1 \in P_{m_v}(\Omega_i), v_2 \in P_{m_v}(\Omega_i), \operatorname{div} \vec{v} = 0\},$$

где $P_{m_v}(\Omega_i)$ — пространство, состоящее из всех полиномов степени не выше m_v , определенных в Ω_i .

- Давление p ищется в пространстве полиномов $P_{m_p}(\Omega_i)$ степени не выше m_p ,
(в методах коллокаций и КЭ существенно условие LBB:
 $m_p < m_v$). Численные эксперименты показали, что в методе КНН не обязательно выполнение условия LBB.

Приближенное решение за счет выбора коэффициентов разложения скорости в базисе $\mathbf{P}_{m_v}$ удовлетворяет уравнению неразрывности $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ внутри каждой ячейки тождественно (с точностью до порядка аппроксимации).

В ячейке Ω_j приближенное решение представляется в виде

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{d_v} C_{ik}^v \vec{\varphi}_k^v, \quad p = \sum_{k=1}^{d_p} C_{ik}^p \varphi_k^p,$$

где

- $\vec{\varphi}_k^v$ и C_{ik}^v , ($k = 1, \dots, d_v$) — базис и коэффициенты разложения для скорости,
- φ_k^p и C_{ik}^p , ($k = 1, \dots, d_p$) — базис и коэффициенты разложения для давления.

Соленоидальный базис для компонент скорости

Базисные элементы для скорости $\vec{\varphi}_1^v, \dots, \vec{\varphi}_{d_v}^v$ выбирались здесь следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \xi_2^{\alpha_2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_1^{\alpha_1} \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq m_v,$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha_1} \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \\ \frac{1}{\alpha_2+1} \xi_1^{\alpha_1-1} \xi_2^{\alpha_2+1} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq \alpha_1 \leq m_v, \quad 0 \leq \alpha_2 \leq m_v - \alpha_1.$$

где (ξ_1, ξ_2) — локальные координаты в ячейке Ω_i :

$$\xi_1 = \frac{x_1 - x_{1ci}}{h_i}, \quad \xi_2 = \frac{x_2 - x_{2ci}}{h_i},$$

(x_{1ci}, x_{2ci}) — центр ячейки, $h_i = (h_{1i} h_{2i})^{1/2}$, $2h_{1i}$, $2h_{2i}$ — размеры ячейки по направлениям осей x_1 и x_2 соответственно.

В качестве базиса для $\mathbf{p}$ используются мономы

$$\xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2}, \quad 0 \leq \alpha_1 \leq m_p, \quad 0 \leq \alpha_2 \leq m_p - \alpha_1.$$

Коэффициенты разложения приближенного решения в каждой подобласти (локальной задачи) находятся из переопределенной СЛАУ, состоящей из

- **уравнений коллокаций** — требования того, чтобы приближенное решение удовлетворяло уравнениям Навье-Стокса в конечном множестве точек ячейки (точках коллокаций),
- **условий согласования** — краевых условий локальной задачи, которые записываются на границах между соседними ячейками,
- **краевых условий** задачи (1), записанных в конечном числе точек (для ячеек, примыкающих к границе $\partial\Omega$),
- **интегрального условия для давления.**

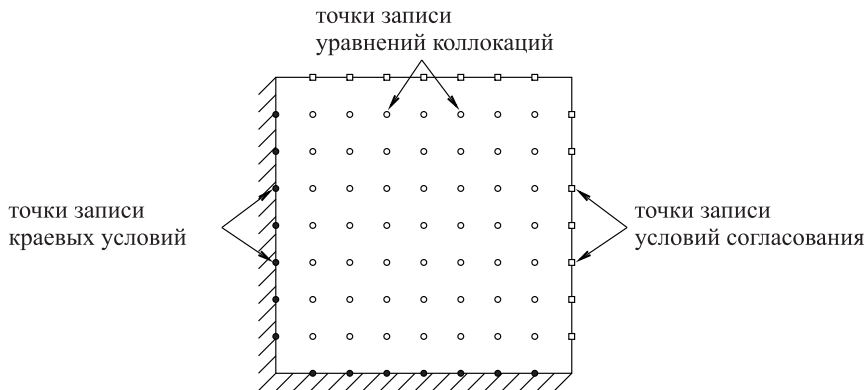


Рис.: Схема расположения точек записи уравнений коллокаций (o), условий согласования (□) и краевых условий (●) в ячейке сетки.

- Линеаризация уравнений коллокаций производится по Ньютону. Итерации по подобластям и по нелинейности совмещаются.
- Коэффициенты приближенного решения находится из условия минимума функционала

$$\Phi = \sum_{k=1}^{n_c} \Psi_{ck}^2 + \sum_{k=1}^{n_m} \Psi_{mk}^2 + \sum_{k=1}^{n_b} \Psi_{bk}^2,$$

где Ψ_{ck} , Ψ_{mk} , Ψ_{bk} — невязки, а n_c , n_m , n_b — количества уравнений коллокаций, условий согласования и граничных условий, записанных в ячейке, соответственно.

- Вместо МНК, который использовался в ранних версиях метода КНН (КНК), здесь используется ортогональный метод линейной алгебры. Он дает то же решение при фиксированном порядке записи уравнений в СЛАУ, что и МНК при отсутствии ошибок округления. Ортогональный метод не ухудшает обусловленность системы в процессе решения в отличие от МНК.

Проверка сходимости на последовательности сеток

Эксперименты проводились с тестовым решением

$$v_1(x_1, x_2) = \cos(2\pi x_1) \sin(2\pi x_2),$$

$$v_2(x_1, x_2) = -\sin(2\pi x_1) \cos(2\pi x_2),$$

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi x_1}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi x_2}{2}\right) \right)$$

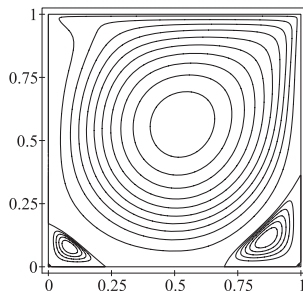
Таблица: Погрешности компонент приближенного решения метода КНН на последовательности сеток, $Re=100$.

Сетка	$ \vec{v} - \vec{v}_h _{C(\Omega)}$	$\frac{ \vec{v} - \vec{v}_{2h} _{C(\Omega)}}{ \vec{v} - \vec{v}_h _{C(\Omega)}}$	$ p - p_h _{C(\Omega)}$	$\frac{ p - p_{2h} _{C(\Omega)}}{ p - p_h _{C(\Omega)}}$
$m_v=2, m_p=1$				
10×10	$6.02 \cdot 10^{-2}$	—	$6.64 \cdot 10^{-2}$	—
20×20	$1.37 \cdot 10^{-2}$	4.4	$1.66 \cdot 10^{-2}$	4.0
40×40	$3.11 \cdot 10^{-3}$	4.4	$4.41 \cdot 10^{-3}$	3.8
$m_v=3, m_p=2$				
10×10	$7.22 \cdot 10^{-3}$	—	$1.22 \cdot 10^{-2}$	—
20×20	$1.42 \cdot 10^{-3}$	5.1	$2.37 \cdot 10^{-3}$	5.1
40×40	$2.83 \cdot 10^{-4}$	5.0	$4.71 \cdot 10^{-4}$	5.0
$m_v=4, m_p=3$				
10×10	$7.24 \cdot 10^{-4}$	—	$9.83 \cdot 10^{-4}$	—
20×20	$3.39 \cdot 10^{-5}$	21.4	$6.20 \cdot 10^{-5}$	15.9
40×40	$1.97 \cdot 10^{-6}$	17.2	$3.85 \cdot 10^{-6}$	16.1
$m_v=5, m_p=4$				
5×5	$8.71 \cdot 10^{-3}$	—	$1.34 \cdot 10^{-2}$	—
10×10	$2.82 \cdot 10^{-4}$	30.9	$4.14 \cdot 10^{-4}$	32.4
20×20	$8.31 \cdot 10^{-6}$	34.0	$1.30 \cdot 10^{-5}$	31.9

Таблица: Погрешности компонент приближенного решения метода КНН на последовательности сеток, $Re=100$.

Сетка	$\ \vec{v} - \vec{v}_h\ _{C(\Omega)}$	$\frac{\ \vec{v} - \vec{v}_{2h}\ _{C(\Omega)}}{\ \vec{v} - \vec{v}_h\ _{C(\Omega)}}$	$\ p - p_h\ _{C(\Omega)}$	$\frac{\ p - p_{2h}\ _{C(\Omega)}}{\ p - p_h\ _{C(\Omega)}}$
$m_v=6, m_p=5$				
5×5	$6.30 \cdot 10^{-4}$	—	$9.4 \cdot 10^{-4}$	—
10×10	$7.53 \cdot 10^{-6}$	83.7	$1.15 \cdot 10^{-5}$	82.0
20×20	$6.48 \cdot 10^{-8}$	116	$1.05 \cdot 10^{-7}$	109
$m_v=7, m_p=6$				
5×5	$2.57 \cdot 10^{-5}$	—	$3.73 \cdot 10^{-5}$	—
10×10	$2.68 \cdot 10^{-7}$	95.8	$4.08 \cdot 10^{-7}$	91.3
20×20	$2.08 \cdot 10^{-9}$	129	$3.27 \cdot 10^{-9}$	125
$m_v=8, m_p=7$				
5×5	$6.10 \cdot 10^{-6}$	—	$7.17 \cdot 10^{-6}$	—
10×10	$1.79 \cdot 10^{-8}$	340	$2.81 \cdot 10^{-8}$	255
20×20	$4.01 \cdot 10^{-11}$	447	$6.69 \cdot 10^{-11}$	420

Задача о течении в каверне



- Задача о течении в каверне считается многими авторами эталонной задачей для тестирования численных методов решения уравнений Навье-Стокса.
- Присутствие особенностей в углах каверны порождает сложную картину течения, представленную многочисленными вихрями, интенсивность и расположение которых зависят от числа Рейнольдса.
- Эта задача используется многими исследователями при демонстрации возможностей различных методов для моделирования течений вязких жидкостей.

Высокоточные решения задачи о течении в каверне

Botella O. and Peyret R. (1998)

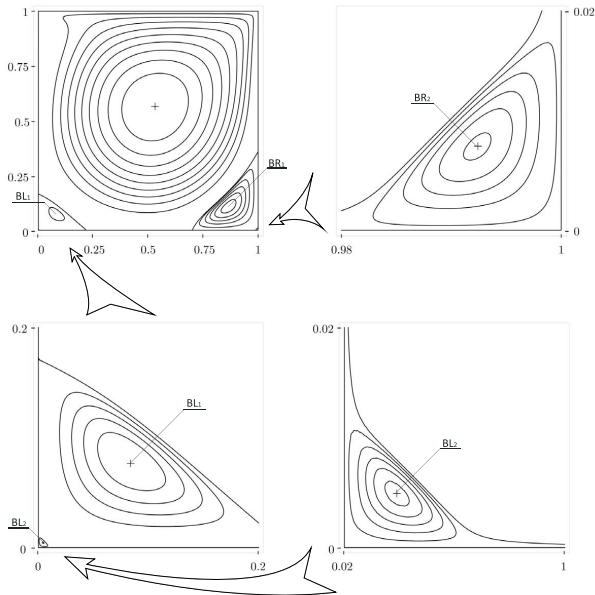
В этой работе решение строится спектральным методом. Для повышения точности расчета используется исключение главных членов асимптотики решения в верхних углах каверны, где оно имеет особенности (скорость терпит разрыв на границе).

Garanzha V.A., Konshin V.N. (1999)

Решение получено с помощью компактной конечно-разностной схемы высокого порядка.

Shapeev A.V., Lin P. (2009)

Используется высокоточный метод конечных элементов с экспоненциальным сгущением сетки около углов каверны. В окрестности всех углов выписываются асимптотики точного решения, которые затем используются при построении приближенного.



Картина течения в каверне при $Re = 1000$ и ее увеличенные фрагменты. Приближенное решение получено методом КНН ($m_v = 2$, $m_p = 2$) на модифицированной сетке Гаусса-Лобатто 320×320 .

(Названия вихрей даны Ghia U., Ghia K.N., Shin C.T. High-Re Solutions for Incompressible ... // JCP 1982.)

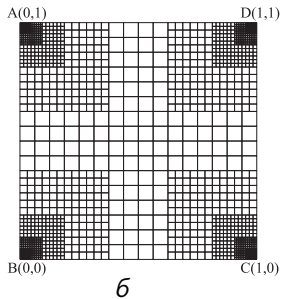
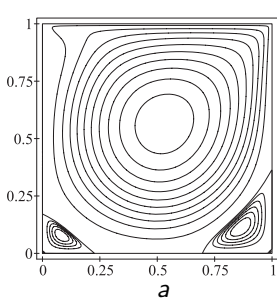


Рис.: Картина течения в каверне при $Re = 1000$ (а). Расчетная сетка M_1 (б).

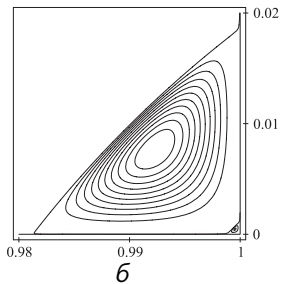
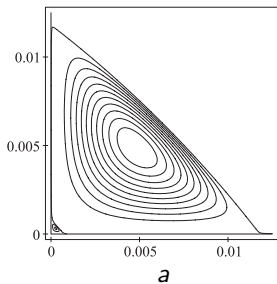
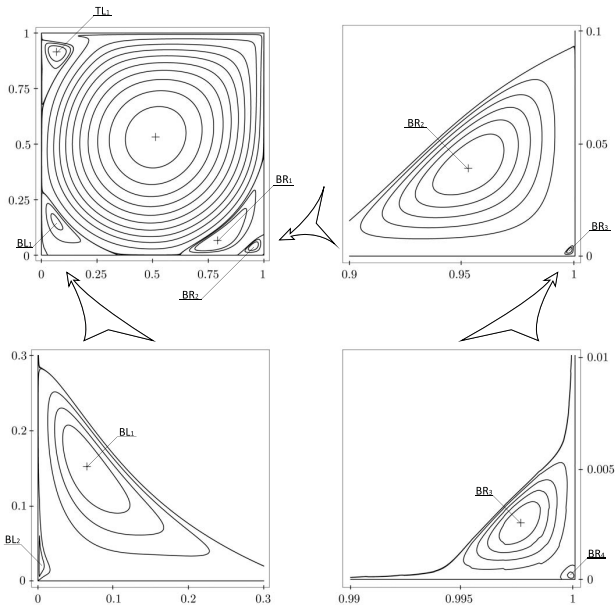


Рис.: Угловые вихри BL_2 , BL_3 (а) и BR_2 , BR_3 (б) при $Re = 1000$.



Картина течения в каверне при $Re = 7500$ и ее увеличенные фрагменты.

Приближенное решение получено методом КНН ($m_v = 2$, $m_p = 1$) на равномерной сетке 1280×1280 .

Экстремумы компонент скорости на средних линиях каверны, $Re = 1000$.

Работа	Сетка	$u_1 \min$	$u_2 \min$	$u_2 \max$
Гаранжа В.А., Коньшин В.Н.	160×160	-0.388569	—	—
Botella O., Peyret R.	160×160	-0.3885698	-0.5270771	0.3769447
эта работа ¹	сетка M_1 (1843 ячейки)	-0.3882982	-0.5266935	0.3766800
эта работа ¹	сетка M_2 (7372 ячейки)	-0.3885672	-0.5270754	0.3769419
эта работа ¹	сетка M_3 (29488 ячеек)	-0.3885697	-0.5270771	0.3769446

¹Приближенное решение получено методом КНН при $m_v = 6$, $m_p = 5$.

Сетка M_2 получена из сетки M_1 разбиением каждой ее ячейки на четыре равные части. Аналогичным путем сетка M_3 получена из сетки M_2 .

Интенсивность и положение центров вихрей в каверне при $Re = 1000$.

работа	ψ	x_1	x_2
центральный вихрь PE			
эта работа ¹ , сетка M_1	-0.11885323	0.53067831	0.56523414
эта работа ¹ , сетка M_2	-0.11893562	0.53078734	0.56523714
эта работа ¹ , сетка M_3	-0.11893658	0.53079012	0.56524057
Botella, Peyret	-0.1189366	0.5308	0.5652
Shapeev A., Lin	-0.1189366	0.5307901	0.5652406
левый нижний угловой вихрь BL ₁			
эта работа ¹ , сетка M_3	0.0002334526	0.08327317	0.07809572
Botella, Peyret	0.0002334528	0.0833	0.0781
Shapeev A., Lin	0.0002334529	0.08327318	0.07809572
правый нижний угловой вихрь BR ₁			
эта работа ¹ , сетка M_3	0.001729716	0.8640401	0.1118062
Botella, Peyret	0.001729717	0.8640	0.1118
Shapeev A., Lin	0.001729717	0.8640401	0.1118062
левый нижний угловой вихрь BL ₂			
эта работа ¹ , сетка M_3	$-6.398534 \cdot 10^{-9}$	0.004842807	0.004845128
Botella, Peyret	$-6.39800 \cdot 10^{-9}$	0.00484	0.00484
Shapeev A., Lin	$-6.398554 \cdot 10^{-9}$	0.004842696	0.004845241
правый нижний угловой вихрь BR ₂			
эта работа ¹ , сетка M_3	$-5.040767 \cdot 10^{-8}$	0.9923249	0.007651025
Botella, Peyret	$-5.03944 \cdot 10^{-8}$	0.99232	0.00765
Shapeev A., Lin	$-5.039380 \cdot 10^{-8}$	0.9923249	0.007650979
левый нижний нижний угловой вихрь BL ₃			
эта работа ¹ , сетка M_3	$2.18 \cdot 10^{-13}$	0.000271	0.00032
Shapeev A., Lin	$1.764264 \cdot 10^{-13}$	0.0002923789	0.0002923791
правый нижний нижний угловой вихрь BR ₃			
эта работа ¹ , сетка M_3	$1.44 \cdot 10^{-12}$	0.9995307	0.000456
Shapeev A., Lin	$1.389493 \cdot 10^{-12}$	0.9995375	0.0004625364

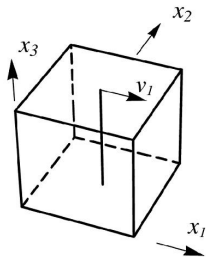
¹ Приближенное решение получено методом КНН при $m_v = 6$, $m_p = 5$.

О количестве неизвестных в методе КНН

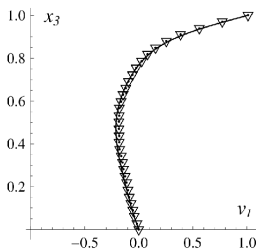
- 1 Число неизвестных в методе КНН при $m_v = 2$, $m_p = 2$ составляет $6 \cdot 10^6$ для равномерной сетки 640×640 и $25 \cdot 10^6$ для 1280×1280 .
- 2 Несмотря на большое число неизвестных, наблюдается сходимость приближенного решения на последовательности сеток 320×320 , 640×640 , 1280×1280 .
- 3 Использование в методе КНН таких подробных сеток при счете на однопроцессорной ПЭВМ стало возможным, благодаря улучшениям, сделанным в данной работе: применению ортогональных алгоритмов линейной алгебры вместо МНК и метода ускорения сходимости итераций решения СЛАУ с использованием подпространств Крылова.

Течение вязкой жидкости в 3D каверне.

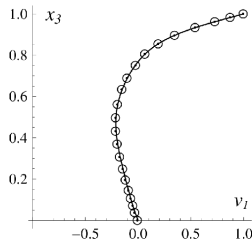
Для решения 3D уравнений Навье-Стокса был построен вариант метода КНН с базисом трехмерных “соленоидальных” многочленов второй степени. Проведены расчеты течения в 3D каверне на последовательности сеток $20*20*20$, $40*40*40$, $80*80*80$, $160*160*160$ при $Re = \{100, 1000\}$. Пока не преследовалась цель достичь особо высокой точности, как это было сделано в двумерном случае. Однако сравнение с самыми точными аналогичными расчетами, когда применялось выделение особенностей решения задачи и методы более высокого порядка точности, дали хорошее совпадение.



(а)



(б)

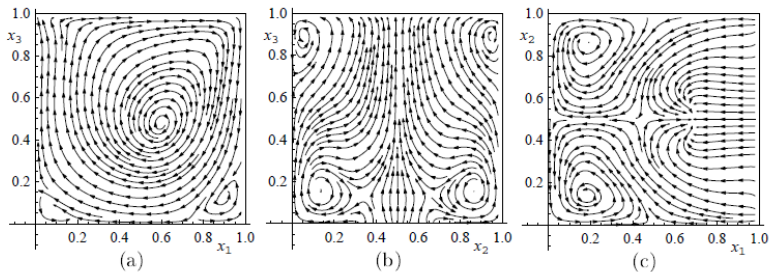


(в)

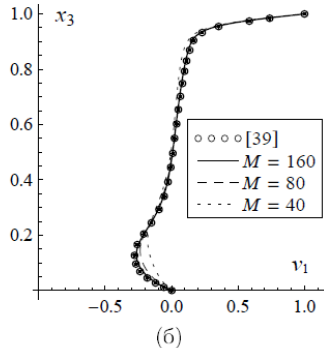
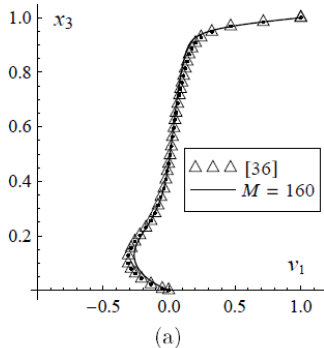
Рис.: Сравнение профилей скорости на центральной линии для $Re = 100$: (а) геометрия течения в кубической каверне; (б), (в) – профили составляющей скорости v_1 ; сплошная линия – наш расчет,

∇ – результат работы **Babu V., Korpela S.** Numerical solution of the incompressible three-dimensional Navier–Stokes equations // Computers & Fluids. 1994. **23**, N 5. 675–691.,

о – результат работы **Albensoeder S., Kuhlmann H.C.** Accurate three-dimensionallid-driven cavity flow // J. Comput. Phys. 2005. **206**, N 2. 536–558.



Линии и псевдолинии тока при $\mathbf{Re}=1000$ в средних сечениях куба: (a) $x_1=0.5$,
(b) $x_2=0.5$, (c) $x_3=0.5$.



Результаты численного расчета течения в кубической каверне при $Re = 1000$. Сплошные линии на рисунке --- результат расчета по методу КНН. На рис. (б) показывает динамику сходимости с увеличением числа ячеек сетки в каждом пространственном направлении.

[36] **Babu V., Korpela S.** Numerical solution of the incompressible three-dimensional Navier--Stokes equations // Computers & Fluids. 1994. {\bf 23}, N 5. 675--691.

[39] **Albensoeder S., Kuhlmann H.C.** Accurate three-dimensional lid-driven cavity flow // J. Comput. Phys. 2005. {\bf 206}, N 2. 536--558.

Вариант алгоритма ускорения сходимости итераций решения СЛАУ с использованием подпространств Крылова.

Пусть итерационный процесс решения СЛАУ $\mathbf{A}\vec{\mathbf{X}} = \vec{\mathbf{d}}$ имеет вид

$$\vec{\mathbf{X}}^{n+1} = \mathbf{T}\vec{\mathbf{X}}^n + \vec{\mathbf{f}}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2)$$

где $\mathbf{A}$, $\mathbf{T}$ — квадратные вещественные матрицы, $\vec{\mathbf{f}}$, $\vec{\mathbf{d}}$ — векторы правых частей, $\vec{\mathbf{X}}^n$ — приближение к решению на итерации с номером n . Пусть итерационный процесс (2) сходится, и система $\mathbf{A}\vec{\mathbf{X}} = \vec{\mathbf{d}}$ эквивалентна системе

$$\vec{\mathbf{X}} = \mathbf{T}\vec{\mathbf{X}} + \vec{\mathbf{f}}. \quad (3)$$

Подставляя значение $\vec{\mathbf{X}}^n$ в систему (3) и учитывая (2), имеем невязку уравнения (3) на n -ой итерации

$$\vec{\mathbf{r}}^n = \mathbf{T}\vec{\mathbf{X}}^n + \vec{\mathbf{f}} - \vec{\mathbf{X}}^n = \vec{\mathbf{X}}^{n+1} - \vec{\mathbf{X}}^n. \quad (4)$$

Вычитая (2) из (3), имеем для погрешности

$$\vec{\mathbf{Z}}^n = \vec{\mathbf{X}} - \vec{\mathbf{X}}^n \quad (5)$$

соотношение на последовательности итераций

$$\vec{\mathbf{Z}}^{n+1} = \mathbf{T}\vec{\mathbf{Z}}^n. \quad (6)$$

Преобразуя (4) с учетом (5), находим

$$\vec{r}^n = \vec{X}^{n+1} - \vec{X} + \vec{X} - \vec{X}^n = \vec{Z}^n - \vec{Z}^{n+1}. \quad (7)$$

Поддействуем оператором T на (7) и с учетом (6) получим

$$T\vec{r}^n = T\vec{Z}^n - T\vec{Z}^{n+1} = \vec{r}^{n+1}$$

или

$$\vec{r}^{n+1} = T\vec{r}^n. \quad (8)$$

Поддействуем оператором T на соотношение $\vec{Z}^n = \vec{Z}^{n+1} + \vec{r}^n$, которое следует из (7):

$$T\vec{Z}^n = \vec{Z}^{n+1} = T(\vec{Z}^{n+1} + \vec{r}^n).$$

Пусть T^{-1} — оператор обратный к оператору T . Проведем в полученном соотношении тождественное преобразование

$$(T^{-1} - E)\vec{Z}^{n+1} = \vec{r}^n. \quad (9)$$

Пусть от приближения $\vec{X}^0$ сделана $k + 1$ итерация, вычислены $\vec{X}^1, \vec{X}^2, \dots, \vec{X}^{k+1}$ и $\vec{r}^0, \vec{r}^1, \dots, \vec{r}^k$. И пусть k меньше размерности вектора $\vec{X}$. Тогда согласно (9) имеем

$$(\mathbf{T}^{-1} - \mathbf{E})\vec{Z}^{k+1} = \vec{r}^k. \quad (10)$$

По определению

$$\vec{X} = \vec{X}^{k+1} + \vec{Z}^{k+1}. \quad (11)$$

Имея несколько приближенных значений решения в сходящемся итерационном процессе (3), можно вычислить некоторое $\vec{Y}^{k+1}$ — хорошее приближение к $\vec{Z}^{k+1}$ и существенно уточнить найденное $k + 1$ приближение к решению, полагая

$$\vec{X} \cong \vec{X}^{*k+1} = \vec{X}^{k+1} + \vec{Y}^{k+1}. \quad (12)$$

Вектор поправки $\vec{Y}^{k+1} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{r}^i$ с неопределенными коэффициентами α_i ищется здесь в подпространстве Крылова

$$\mathcal{K}_k(\vec{r}^1, \mathbf{T}) = \text{span}\{\vec{r}^1, \mathbf{T}\vec{r}^1, \dots, \mathbf{T}^{k-1}\vec{r}^1\}, \quad (13)$$

где $\text{span}\{\vec{v}^1, \dots, \vec{v}^k\}$ — линейная оболочка векторов $\vec{v}^1, \dots, \vec{v}^k$.

Потребуем, чтобы искомый $\vec{Y}^{k+1}$, как и точный вектор $\vec{Z}^{k+1}$, удовлетворял уравнениям (10). После подстановки $\vec{Y}^{k+1}$ в (10), с учетом соотношения $T^{-1} \vec{r}^{n+1} = T \vec{r}^n$, следующего из (8), получим переопределенное СЛАУ

$$\left(\vec{r}^1 - \vec{r}^0 \right) \alpha_1 + \dots + \left(\vec{r}^k - \vec{r}^{k-1} \right) \alpha_k = -\vec{r}^k. \quad (14)$$

Ранее нами вслед за А.Г. Слепцовым

Слепцов А.Г. Об ускорении сходимости линейных итераций // Моделирование в механике. Новосибирск, 1989. Т. 3(20), № 3. С. 132–147.

система (14) решалась методом наименьших квадратов. Ее решение определяет искомый $\vec{Y}^{k+1}$ и уточненное приближение $\vec{X}^{*k+1}$ (12). В наших последних работах система (14) решается применением **QR** – разложения (**Q** – ортогональная матрица Гивенса или Хаусхолдера, **R** – треугольная матрица).

Шапеев В.П., Ворожцов Е.В., Исаев В.И., Идимешев С.В. Метод коллокаций и наименьших невязок для трехмерных уравнений Навье–Стокса // Вычислительные методы и программирование. – 2013. – т. 124. – № 1. – С. 306–322

- 1 Система (14) после достаточно большого количества итераций становится плохо обусловленной. Кроме ортогонализации базиса в комбинации применяются несколько приемов, направленных против потери точности численного решения системы (14). Сначала нормировка столбцов ее матрицы.
- 2 В случае, когда среди разностей соседних невязок есть близкие к линейно зависимым (чаще всего при наличии малых невязок) необходимо их не использовать для построения поправки.
- 3 Здесь число линейно независимых невязок, которые можно использовать для "устойчивой" поправки, определяется автоматически в ходе решения ортогональным методом СЛАУ, из которой определяется поправка.
- 4 Критерий выбора числа невязок (**S**-критерий) основан на контроле величины выбранного главного элемента на очередном этапе исключения в **QR** – разложении матрицы СЛАУ. Это позволяет запрограммировать (автоматизировать) процесс выбора "устойчивого базиса", ограничивая размерность базиса подпространства Крылова в процессе решения системы (14) путем удаления из базиса в соответствии с **S**-критерием векторов, близких к зависимым.

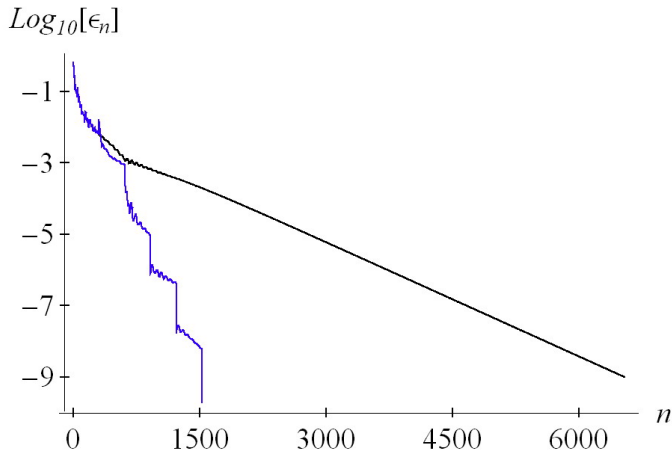


Рис.: Зависимость псевдопогрешности ϵ_n от номера итерации n с использованием ускорений (синий график, $k = 2$) и без использования ускорения (черный график).

Число итераций, необходимых для достижения заданного уровня псевдопогрешности, сократилось в **4** раза после использования ускорения.

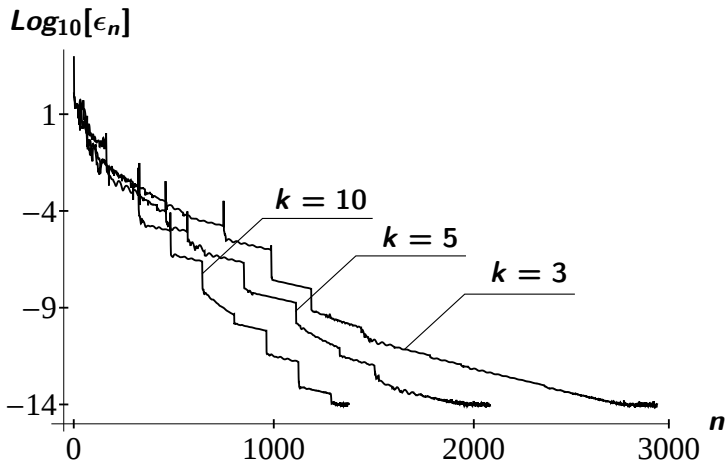
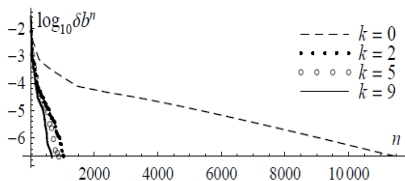


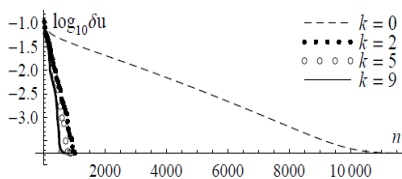
Рис.: Зависимость псевдопогрешности ϵ_n от номера итерации n при использовании разного числа невязок в методе ускорения сходимости ($k = 3, 5, 10$).

Число итераций, необходимых для достижения заданного уровня псевдопогрешности, сократилось в 2 раза с увеличением k от 3 до 10.

При решении 3D уравнений уравнений Навье-Стокса методом КНН с применением подпространств Крылова для ускорения итераций время, необходимое для достижения той же точности, что и в случае без ускорения итераций сокращалось до 20 раз. То есть, чем больше размер сетки, тем эффективнее применение ускорения итераций.



(а)

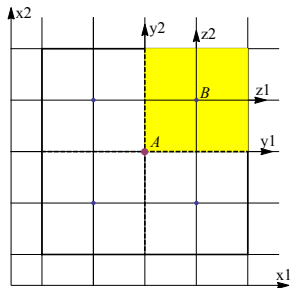
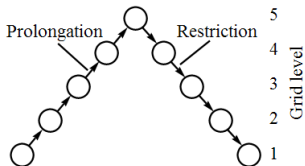


(б)

Ускорение процесса сходимости итераций, основанное на применении подпространств Крылова с различными размерами базиса: $k = 0, 2, 5, 9$, n – количество итераций. На рис. (а) логарифм нормы псевдопогрешности коэффициентов полиномиального базиса, на рис. (б) логарифм нормы погрешности значения скорости в тестовом решении.

Было реализовано комбинированное применение двух подходов ускорения итерационных процессов решения дискретных задач: применение многосеточного комплекса и подпространств Крылова в процессе итераций на каждой отдельной сетке комплекса. Так в процессе подъема от самой грубой сетки комплекса ($1, \dots, 10 \times 10$ ячеек) к самой подробной сетке (в экспериментах 80×80 , 100×100 ячеек) физическое время решения задачи ускорялось в 100-300 раз по сравнению со временем решения на самой подробной сетке комплекса без применения использованных здесь приемов ускорения итераций.

Сочетание алгоритмов Федоренко продолжения на многосеточном комплексе и алгоритма Крылова ускорения итерационного решения СЛАУ.



При переходе с грубой сетки на мелкую (операция продолжения) в качестве начального приближения решения на мелкой сетке берется решение полученное на грубой сетке. В нем делается замена переменных: в каждой ячейке мелкой сетки переход от локальных переменных в содержащей ее ячейке грубой сетки y_1, y_2 к локальным переменным z_1, z_2 в ячейке мелкой сетки. Зависимость локальных переменных в любой ячейке от глобальных переменных линейная. Поэтому из найденных полиномов от y_1, y_2 после замены получаются полиномы от z_1, z_2 , коэффициенты которых аналитически выражаются через коэффициенты полиномов от y_1, y_2 .

Численные эксперименты с использованием точного решения уравнений Н-С на ветви продолжения **V** – цикла без применения подпространств Крылова и с ними при различном количестве векторов базиса в подпространстве. В таблице K_{mgr} – количество сеток, взятых в последовательности сеток.

$K_{mgr} = 1$ означает, что расчет проводился только на самой мелкой сетке использованного комплекса в конкретном эксперименте. с числом ячеек N_{it} – суммарное количество итераций, выполненных на всех сетках в отдельном эксперименте. Фактор ускорения AF – отношение времени счета при $K_{mgr} = 1$, $k = 0$ ко времени счета при ($K_{mgr} > 1$, $k = 0$ или $k > 1$); расчет останавливался при достижении заданной точности.

Таблица: Влияние применения последовательности сеток с **5 → 10 → 20 → 40 → 80** ячейками в каждом направлении и алгоритма Крылова на скорость сходимости метода КНН при $Re = 1000$

Метод	N_{it}	$T_{счета}$, сек.	AF	δu	δp
$K_{mgr} = 1, k = 0$	3827643	697397	1.0	$0.2801 \cdot 10^{-4}$	$0.5428 \cdot 10^{-3}$
$K_{mgr} = 5, k = 0$	219375	40904	17.05	$0.5966 \cdot 10^{-4}$	$0.6314 \cdot 10^{-4}$
$K_{mgr} = 1, k = 9$	39871	7454	93.56	$0.9310 \cdot 10^{-4}$	$0.1795 \cdot 10^{-3}$
$K_{mgr} = 1, k = 10$	40278	7544	92.44	$0.9310 \cdot 10^{-4}$	$0.1796 \cdot 10^{-3}$
$K_{mgr} = 5, k = 5$	16685	2856	244.19	$0.5976 \cdot 10^{-4}$	$0.9101 \cdot 10^{-4}$
$K_{mgr} = 5, k = 7$	14171	2398	290.82	$0.5966 \cdot 10^{-4}$	$0.1135 \cdot 10^{-3}$
$K_{mgr} = 5, k = 8$	13730	2318	300.86	$0.5976 \cdot 10^{-4}$	$0.1086 \cdot 10^{-3}$
$K_{mgr} = 5, k = 9$	12851	2157	323.32	$0.5976 \cdot 10^{-4}$	$0.1077 \cdot 10^{-3}$
$K_{mgr} = 5, k = 10$	15552	2676	260.64	$0.5976 \cdot 10^{-4}$	$0.9164 \cdot 10^{-4}$

Еще результаты и приложения метода КНН.

- Проведены численные эксперименты на различных нерегулярных и адаптивных сетках с прямоугольным, треугольными и нерегулярными ячейками в областях с криволинейной границей. Зачастую точность и порядок сходимости решения задач в таких областях по методу КНН близкий к тем, что имеют место в прямоугольной области.
- Возможности метода испытаны на решении уравнения конвекции - диффузии с малым параметром при старших производных ($= 10^{-4}$).
- Апробированы консервативные варианты метода для уравнения конвекции-диффузии, Бюргерса (без вязкости), Korteweg–de Vries, 2D и 3D теплопроводности с конвекцией в области с криволинейной границей. Для уравнения конвекции-диффузии также были построены и реализованы варианты метода повышенной точности.
- Методом КНН решены прикладные задачи:
3D-моделирования лазерной сварки с учетом конвекции расплава в сварочной ванне,
моделирования напряженного состояния упругих однослойных и композитных пластин с применением различных механических моделей.
В решениях задач присутствовали особенности, которые предъявляют повышенные требования к возможностям численных методов.

Примеры с нерегулярными сетками.

Уравнение типа конвекции-диффузии

$$\varepsilon \Delta u + (x_1 - a_1)u_{x_1} + (x_2 - a_2)u_{x_2} = 0 \quad (15)$$

имеет семейство точных решений $u(x_1, x_2) = G(y_1)G(y_2)$,
 $\mu = \cos \varphi$, $\nu = \sin \varphi$, $p = -(\mu a_1 + \nu a_2)$, $q = \nu a_1 - \mu a_2$,
 $y_1 = \mu x_1 + \nu x_2 + p$, $y_2 = -\nu x_1 + \mu x_2 + q$,

$$G(y) = 0.5 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{y/\sqrt{2\varepsilon}} e^{-t^2} dt.$$

Беляев В.В., Шапеев В.П. Метод коллокаций и наименьших квадратов на адаптивных сетках в области с криволинейной границей. // Вычислительные технологии. 2000. Т. 5, №4. С. 12–21.

Подход, в котором область с криволинейной границей покрыта прямоугольной сеткой. Нерегулярные, принадлежащие области части ячеек, отсеченные границей от граничных ячеек, классифицировались по форме. В них в зависимости от их формы различными способами расставлялись точки коллокации, на границах с соседними расчетными ячейками – условия согласования и точно на границе ячейки, совпадающей с границей области, точки записи краевых условий. С точностью до поворотов были выделены 6 типов ячеек. Программа автоматически определяла тип нерегулярной ячейки и выписывала в ней переопределенную систему для определения в ней решения.

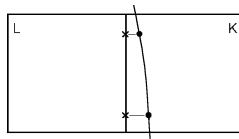
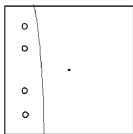


Рис.: Положение точек коллокации и записи граничных условий.в одном из типов нерегулярной приграничной ячейки.

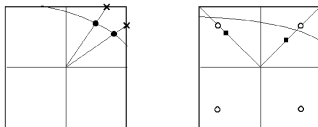


Рис.: Положение точек записи граничных условий (слева) и коллокации (справа) в одном из типов приграничной ячейки, получившуюся отсечением небольшой части ее границей области.

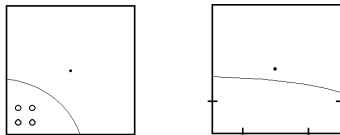


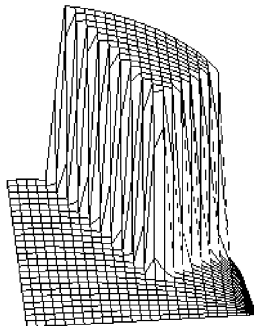
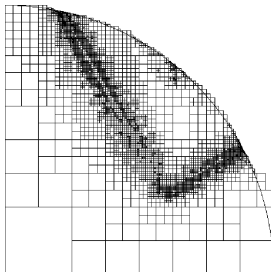
Рис.: Положение точек коллокации в одном из типов нерегулярной приграничной ячейки (слева), имеющей центр вне области и не менее двух точек согласования, положение точек согласования в одном из типов (изображенных на рис. 4) нерегулярной приграничной ячейки (справа).

На тестовой задаче без особенностей при $\epsilon = 1$ проведены численные эксперименты, когда расчетная область – четверть круга вписана в прямоугольник и накрыта прямоугольной сеткой. На последовательности сеток в норме C определялась погрешность и порядок сходимости решения. В обоих случаях решения сходятся с одним и тем же порядком и незначительно различаются погрешностью (N – число ячеек в прямоугольнике, расчеты проведены в арифметике с одинарной точностью – real).

N	400	1600	6400	25600
A	$3.5 \cdot 10^{-5}$	$4.4 \cdot 10^{-6}$	$6.6 \cdot 10^{-7}$	$3.2 \cdot 10^{-7}$
B	$3.7 \cdot 10^{-5}$	$4.6 \cdot 10^{-6}$	$7.3 \cdot 10^{-7}$	$4.0 \cdot 10^{-7}$

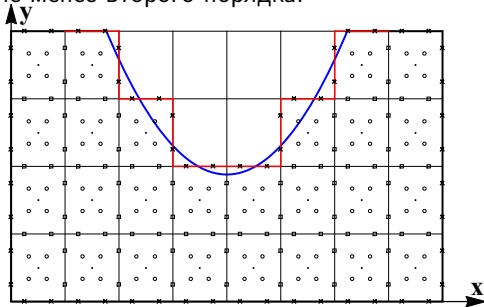
То есть, такой подход оправдан.

При значении $\epsilon = 10^{-4}$ в области присутствуют узкие пограничные слои с большими градиентами решения. Сформулированный подход дополнен приемом построения адаптивной сетки, которая сгущалась в области больших градиентов решения, реализуя критерий Иво Бабушки на основе им же предложенного способа оценки величины погрешности решения в конкретной ячейке. Ячейки, в которых величина погрешности превышала заданную, дробились на 4 части.



N	16	31	367	2083	6724	8446	17968	29680	69718
Error	0.63	0.59	0.46	0.22	$4.9 \cdot 10^{-2}$	$1.9 \cdot 10^{-2}$	$8.3 \cdot 10^{-3}$	$3.5 \cdot 10^{-3}$	$5.0 \cdot 10^{-4}$

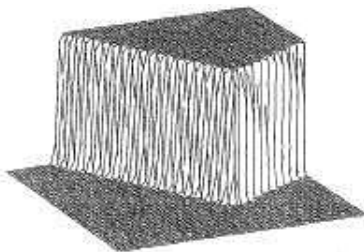
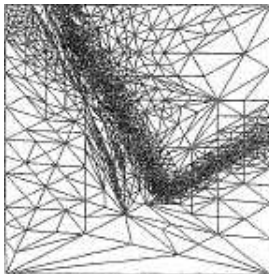
Здесь на рисунке схематично изображены другие подходы построения вариантов метода в области с криволинейной границей: 1) приближение границы области ломаной (ступенчатой) линией из ближайших границ прямоугольных ячеек сетки, 2) использование точек коллокаций в законтурной части прямоугольных ячеек, рассеянных границей, для записи уравнений коллокаций, но с записью граничных условий точно в точках на криволинейной границе. Аппробация подходов была на решении двумерного уравнения теплопроводности. В первом случае в методе с базисом из полиномов второй степени сходимость решения с первым порядком, во втором случае не менее второго порядка.



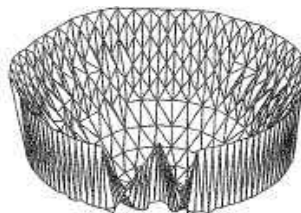
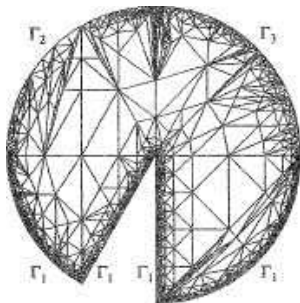
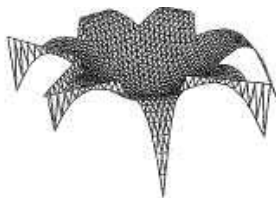
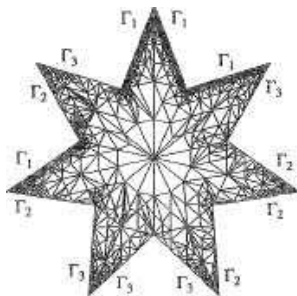
Вариант метода, когда кривая часть границы аппроксимировалась хордами дуг, отсеченных от нее сеткой, в экспериментах также дал второй порядок сходимости метода.

Треугольные сетки.

Слепцов А.Г., Шокин Ю.И. Адаптивный проекционно-сеточный метод для эллиптических задач. Журнал вычислительной математики и математической физики, **37**, № 5, 1997, 572 – 586.



Там же:



Приложения.

Исаев В.И., Шапеев В.П., Черепанов А.Н. Численное моделирование лазерной сварки тонких металлических пластин с учетом конвекции в сварочной ванне // Теплофизика и аэромеханика. 2010. № 3. С. 451-466.

С.К. Голушко, С.В. Идимешев, В.П. Шапеев. Метод коллокаций и наименьших невязок в приложении к задачам механики изотропных пластин. Вычислительные технологии. 2013, т. 18, № 6. С. 31-43.

В печати статья с применением метода КНН для моделирования напряженного состояния анизотропных композитных пластин.

Vasily P. Shapeev, Evgenii V. Vorozhtsov. Collocations and Least Residuals Method for the Solution of the Burgers and KdVB Equations. Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, Vol. 8660, pp. 434-448.

Consider the Burgers equation

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (16)$$

and the Korteweg–de Vries–Burgers equation [?]

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{D_\sigma^2} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} = 0, \quad (17)$$

where x is the spatial coordinate, t is the time, ν is the viscosity coefficient, $\nu = \text{const} > 0$, Re is the Reynolds number, D_σ is the dispersion.

Equations (16) and (17) are solved in the interval $0 \leq x \leq X$ ($X > 0$) under the following initial and boundary conditions:

$$U(x, t_0) = U_0(x), \quad 0 \leq x \leq X, \quad (18)$$

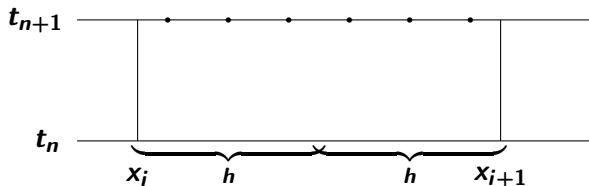
$$U(0, t) = g_1(t), \quad U(X, t) = g_2(t), \quad t \geq t_0, \quad (19)$$

where $U_0(x)$, $g_1(t)$, $g_2(t)$ are the given functions, t_0 is a given initial moment of time (for example, $t_0 = 0$). In the case of the solution of equation (17), the condition $\partial U(X, t)/\partial x = 0$ was posed in addition to conditions (18) and (19).

Introduce the notation $\mathbf{u}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{h}\mathbf{y} + \mathbf{x}_{ci}, t)$. After this substitution of the variable, equations (16) and (17) take the following form:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{h} u \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\nu}{h^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{h} u \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{\text{Re} h^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{D_\sigma^2 h^3} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0. \quad (21)$$



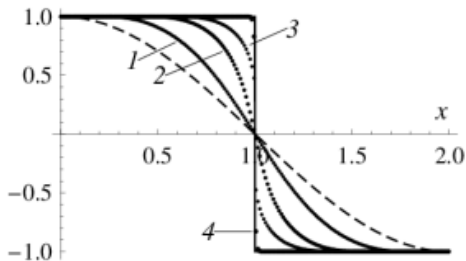
Burgers equation (16) by the implicit Euler method:

$$u_j^{n+1,s+1} - u_j^n + \tau_n \left(\frac{1}{h} u_j^{n+1,s} \frac{\partial u_j^{n+1,s+1}}{\partial y} - \frac{\nu}{h^2} \frac{\partial^2 u_j^{n+1,s+1}}{\partial y^2} \right) = \tau_n f_j(y_j, t_{n+1}), \quad (22)$$

where $j = 1, \dots, N_c$; $n = 0, 1, \dots$, s is the number of the iteration in nonlinearity, $s = 0, 1, \dots$; $u_j^{n+1,0} = u_j^n$, $f_j(y, t)$ is a given right-hand side, it is generally different from zero if the convective term is linearized after Newton.

$$u^{n+1,s+1} = \sum_{l=1}^4 b_{i,l}^{n+1,s+1} y^l \quad (23)$$

$$u^+ = u^-, \quad \frac{du^+}{dy} = \frac{du^-}{dy}.$$



Numerical solution of the Burgers equation by the CLR method: (— — —) initial profile at $t = 0$; solid lines – numerical solutions at the moments of time $t = 0.25$ (curve 1), 0.5 (curve 2), 0.65 (curve 3), and 1.0 (curve 4)

Основные публикации по содержанию доклада.

- В. И. Исаев, В. П. Шапеев. Метод коллокаций и наименьших квадратов повышенной точности для решения уравнений Навье-Стокса. **Доклады Академии наук**, 2012, том 442, № 4, с. 442-445.
- Исаев В.И., Шапеев В.П. Варианты метода коллокаций и наименьших квадратов повышенной точности для численного решения уравнений Навье-Стокса // **ЖВМиМФ**, 2010, том 50, № 10, с. с. 1758-1770.
- V.P. Shapeev and E.V. Vorozhtsov. Symbolic-numeric implementation of the method of collocations and least squares for 3D Navier–Stokes equations // **Lecture Notes in Computer Science**. – 2012. – Vol. 7442. – P. 321–333.
- В.И. Исаев, В.П. Шапеев, С.В. Идимешев. Варианты метода коллокаций и наименьших квадратов повышенной точности для численного решения уравнения Пуассона. **Вычислительные технологии**. 2011, Т. 16, N"1, С. 85-94.

- Исаев В.И., Шапеев В.П., Черепанов А.Н. Численное моделирование лазерной сварки тонких металлических пластин с учетом конвекции в сварочной ванне // **Теплофизика и аэромеханика. 2010. № 3. С. 451-466.**
- Исаев В.И., Шапеев В.П., Еремин С.А. Исследование свойств метода коллокации и наименьших квадратов решения краевых задач для уравнения Пуассона и уравнений Навье - Стокса. // **Вычислительные технологии. 2007. Т. 12, №3. С.53-70.**
- Isaev V., Shapeev V. High Order Versions of the Collocations and Least Squares Method for Navier-Stokes Equations // **Proceedings of ICCFD6, July 12-16, 2010, St. Petersburg, pp. 883-884.**
- V.P. Shapeev, V.I. Isaev and V. Idimeshev. The collocations and least squares method: application to numerical solution of the Navier-Stokes equations, **CD-ROM Proceedings of the 6th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2012), September 10-14, 2012, Vienna, Austria,** Eds.: Eberhardsteiner, J.; Bohm, H.J.; Rammerstorfer, F.G., Publisher: Vienna University of Technology, Austria, ISBN: 978-3-9502481-9-7.

- Исаев В.И., Шапеев В.П. Развитие метода коллокаций и наименьших квадратов // **Труды ИММ УрО РАН. 2008. Т. 14, № 1. С. 41-60.**
- Shapeev V.P., Semin L.G., Belyaev V.V. The Collocation and Least Squares Method for Numerical Solution of Navier-Stokes Equations // **Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, Suppl.2, 2003. P.115-137.**
- Семин Л.Г., Слепцов А.Г., Шапеев В.П. Метод коллокаций - наименьших квадратов для уравнений Стокса // **Вычислительные технологии, 1996, т. 1, № 2, с. 90–98.**
- Семин Л.Г., Шапеев В.П. Метод коллокаций и наименьших квадратов для уравнений Навье—Стокса // **Вычислительные технологии, 1998, т. 3, № 3, с. 72–84.**
- Беляев В.В, Шапеев В.П. Метод коллокаций и наименьших квадратов на адаптивных сетках в области с криволинейной границей // **Вычислительные технологии, 2000, т. 5, № 4, с. 13–21.**

Автору доклада приятно отметить, что в разные годы над разработкой метода КНН имело место сотрудничество с молодыми коллегами:

Слепцовым Анатолием Георгиевичем,
Семиным Леонидом Георгиевичем,
Беляевым Виталием Владимировичем,
Исаевым Вадимом Исмаиловичем,
Ереминым Степаном Александровичем,
Ворожцовым Евгением Васильевичем,
Идимешевым Семеном Васильевичем.

Спасибо за внимание.

Список литературы

-  **Moffatt H.K.** Viscous and resistive eddies near a sharp corner // J. Fluid Mech. 1964. No. 18. P. 1–18.
-  **Ладыженская О.А.** Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 С.
-  **Russell R.D., Shampine L.F.** A collocation method for boundary value problems // Numer. Math. 1972. Vol. 10. P. 582–606.
-  **de Boor C., Swartz B.** Collocation at Gaussian points // SIAM J. Numer. Anal. 1973. Vol. 10, №. 4. P. 582–606.
-  **Ascher U., Christiansen J., Russel R.D.** A collocation solver for mixed order systems of boundary value problems // Math. Comp. 1979. Vol. 33. P. 659–679.
-  **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.



Съярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980. 511 с.



Carey G.G., Cheung Y.K., Lau S.L. Mixed operator problems using least squares finite element collocation // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 1980. Vol. 22. P. 121–130.



Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981. 408 С.



Мысовских И.П. Интерполяционные кубатурные формулы. М.: Наука, 1981. 336 с.



Saad Y. Krylov Subspace Methods for Solving Large Unsymmetric Linear Systems // Mathematics of computation. July 1981. Vol 37, №. 155. P. 105–126.



Mizusawa T., Kajita T. Application of point least squares method with B-splines in solid mechanics problems // Int. J. Numer. Methods Eng. 1982. Vol. 18, No. 6. P. 897–907.



Ghia U., Ghia K.N., Shin C.T. High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the NavierStokes Equations and a Multigrid Method // J. Comput. Phys. 1982, No. 48. P. 387–411.



Беклемишев Д.В. Дополнительные главы линейной алгебры. М.: Наука, 1983. 335 с.



Burgess G., Mahajerin E. Rotational fluid flow using a least squares collocation technique // Comput. Fluids. 1984. Vol. 12. P. 311–317.



Chen C.J., Chen H.J. Finite analytic numerical method for unsteady two-dimensional Navier Stokes equations // J. Computational Physics. 1984. Vol. 53, №. 2. P. 209–226.



Мацокин А.М., Непомнящих С.В. Метод альтернирования Шварца в подпространстве // Известия ВУЗов. Математика. 1985. № 10. С. 61–66.



Dong S.B., Lopez A.E. Natural vibrations of a clamped circular plate with rectilinear orthotropy by least-squares collocation // Int. J. Solids Struct. 1985. Vol. 21. P. 515–526.



Плясунова А.В., Слепцов А.Г. Коллокационно-сеточный метод решения нелинейных параболических уравнений // Моделирование в механике. Новосибирск, 1987. Т. 1(18), № 4 — С.116 – 137.



Jiang B.-N., Carey G.F. Adaptive refinement for least-squares finite elements with element-by-element conjugate gradient solution // Int. J. Numer. Meth. Engineering. 1987. Vol. 24. P. 569–580.



Слепцов А.Г. Об ускорении сходимости линейных итераций // Моделирование в механике. Новосибирск, 1989. Т. 3(20), № 3. С. 132–147.



Слепцов А.Г. Об ускорении сходимости линейных итераций 2// Моделирование в механике. Новосибирск, 1989. Т. 3(20), № 5. С. 132–147.



Schild K.H. Gaussian collocation via defect correction // Numerische Mathematik. 1990. 58. P. 369–386.



Bentley L.R., Pinder G.F., Herrera I. Solution of the advective-dispersive transport equation using a least squares

collocation, Eulerian-Lagrangian method // Numer. Methods Partial Differ. Equations. 1989. Vol. 5, No. 3. P. 227–240.



Толстых А.И. Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики. М.: Наука, 1990. 230 С.



Bruneau C.H., Jouron C. An efficient scheme for solving steady incompressible Navier Stokes equations // J. Computational Physics. 1990. Vol. 89, №. 2. P. 389–413.



Saad Y. Numerical methods for large eigenvalue problems. Manchester University Press. 1991. 358 pp.



Leyk Z. A C0-Collocation-like method for elliptic equations on rectangular regions // The Journal of the Australian Mathematical Society. Series B. Applied Mathematics, 38, pp 368-387



Слепцов А.Г., Летова Е.Ю., Саломатов К.Г., Шмыков И.В. Переопределенные системы конечно-разностных уравнений для задач типа диффузии-конвекции // В сб. Вычислительные технологии. 1993. Т. 2, № 5. С. 192–201.



Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. М.: Изд-во МФТИ, 1994. 528 с.



Deng G.B., Piquet J., Queutey P., Visonneau M. A new fully coupled solution of the Navier-Stokes equations // Int. J. for Numerical Methods in Fluids. 1994. Vol. 19, №. 7. P. 605–639.



Karamyshev V.B., Kovenya V.M., Sleptsov A.G. Adaptive Projection-Grid Methods and Their Applications // Book of Briefs of 15th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics. 1996. P. 296-297.



Karamyshev V., Kovenya V., Sleptsov A. Adaptive Methods for Navier-Stokes Equations // Computational Fluid Dynamics. Proc. of the Third ECCOMAS Conference on Computational Fluid Dynamics. 1996. V. 1 (Paperback) P. 301-307.



Семин Л.Г., Слепцов А.Г., Шапеев В.П. Метод коллокаций-наименьших квадратов для уравнений Стокса // Вычислительные технологии. 1996. Том 1, № 2. С. 90–98.



Karamyshev V.B., Kovenya V.M., Sleptsov A.G., Cherny S.G.

Variational method of accelerating linear iterations and its applications
// Computers & Fluids. 1996. Vol. 25, №. 5. P. 467–484.



Barragy E., Carey G.F. Stream function-vorticity driven cavity solution using p finite elements // Computers & Fluids. 1997. Vol. 26, No. 5. P. 453–468.



Сёмин Л.Г., Шапеев В.П. Коллокационно - сеточный метод решения краевых задач для уравнений Навье-Стокса // Сибирская школа - семинар «Математические проблемы механики сплошных сред», тезисы докладов. Новосибирск, 1997. С. 125–126.



Сёмин Л.Г., Шапеев В.П. Метод коллокаций и наименьших квадратов для уравнений Навье-Стокса // Вычислительные технологии. 1998. Т. 3, № 3. С. 72–84.



Bochev P., Cai Z., Manteuffel T.A., McCormick S.F. Analysis of velocity-flux first-order system least-squares principles for the Navier-Stokes equations.

Part I // SIAM J. Numer. Anal., 1998, vol. 35, №. 3, P. 990–1009.



Botella O., Peyret R. Benchmark spectral results on the lid-driven cavity flow // Computers & Fluids. 1998. Vol. 27, No. 4. P. 421–433.



Jiang B.-N. On the Least Squares Method // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 152 (1998) 239-257.



Semin L.G., Shapeev V.P. Collocation-grid method for solving boundary problems for Navier Stokes equations // International Conference on the Methods of Aerophysical Research, 29 June – 3 July, 1998, Novosibirsk, Russia. Proceedings. Part II. Novosibirsk, 1998. P. 186–191.



Гаранжа В.А., Коньшин В.Н. Численные алгоритмы для течений вязкой жидкости, основанные на консервативных компактных схемах высокого порядка аппроксимации // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1999. Т. 39, № 8. С. 1378–1392.



Shankar P.N., Deshpande M.D. Fluid Mechanics in the Driven Cavity // Annu. Rev. Fluid Mech. 2000. No. 32. P. 93–136.



Беляев В.В., Шапеев В.П. Метод коллокаций и наименьших квадратов на адаптивных сетках в области с криволинейной границей // Вычислительные технологии. 2000. Т. 5, № 4. С. 12–21.



Шапеев А.В. Разностная схема четвертого порядка для уравнений Навье-Стокса на пятиточечном шаблоне // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 2000. Вып. 116. С. 119–122.



Chetverushkin B.N. Introductory word and plenary talk // V International congress on mathematical modelling, 29 Sep – 6 Oct, 2002, Dubna, Moscow Region, Russia.



Shapeev V.P., Semin L.G., Belyaev V.V. The Collocation and Least Squares Method for Numerical Solution of Navier-Stokes Equations // Proc. of the Steklov Inst. of Math. Suppl. 2, 2003. P. S115–S137.



Sahin M., Owens R.G. A novel fully implicit finite volume method applied to the lid-driven cavity problem Part I: High Reynolds number flow calculations // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2003, No. 42. P. 57–77.



Shapeev V.P., Semin L.G., Belyaev V.V. The Collocation and Least Squares Method for Numerical Solution of Navier-Stokes Equations // Proc. of the Steklov Institute of Mathematics, Suppl.2, 2003. P.S115-S137.



Tee W., Sobey I.J. Spectral Method for the unsteady incompressible Navier-Stokes equations in gauge formulation // OU Computing Laboratory Report NA04/09. 2004.



Wu Y., Liao S. Solving high Reynolds-number viscous flows by the general BEM and domain decomposition method // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2005, No. 47. P. 185–199.



Erturk E., Corke T.C., Gokcol C. Numerical solutions of 2-D steady incompressible driven cavity flow at high Reynolds numbers // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2005, No. 48. P. 747–774.



Erturk E., Gokcol C. Fourth Order Compact Formulation of Navier-Stokes Equations and Driven Cavity Flow at High Reynolds Numbers // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2006. Vol 50. P. 421–436.



Heinrichs W. Least-Squares Spectral Collocation with the Overlapping Schwarz Method for the Incompressible Navier-Stokes Equations // Numer. Alg. 2006. № 43. P. 61-73.



Bruneau C.H., Saad M. The 2D lid-driven cavity problem revised Computers&Fluids. 2006. No. 35, P. 326–348.



Ольшанский М.А. Равномерные по параметру многосеточные и итерационные методы // Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. М., 2006.



Cheng M., Hung K.C. Vortex structure of steady flow in a rectangular cavity // Computers & Fluids. 2006, No. 35. P. 1046–1062.



Semin L.G. Collocation and least squares method for 2D heat conductivity equation // Вычислительные технологии. 2006. Т. 11, № 1. С. 18–25.



Василевский Ю.В., Ольшанский М.А. Краткий курс по многосеточным методам и методам декомпозиции области. М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 2007. 100 с.



Garcia S. The Lid-Driven Square Cavity Flow: From Stationary to Time Periodic and Chaotic. // Communications in computational physics. 2007. Vol. 2, № 5, P. 900–932.



Shapeev A.V., Lin P. An asymptotic fitting finite element method with exponential mesh refinement for accurate computation of corner eddies in viscous flows // SIAM J. Sci. Comput. 2009. 31(3). P. 1874–1900.



Isaev V.I., Shapeev V.P. High-Accuracy Versions of the Collocations and Least Squares Method for the Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2010. Vol. 50, No. 10. P. 1670–1681.